13. Übungsblatt zu Mathematik 1 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2021/22

Aufgabe 1. (V) Gegeben seien die folgenden Messwerte:

t_i	0	1	2	3	4
y_i	2	1	0	-1	1

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ausgleichsgeraden (also $a, b \in \mathbb{R}$ mit $y = at + b$) durch die Punkte (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, 5$; siehe Beispiel 19.7 der Vorlesung.

(b) Bestimmen sie analog die Gleichung der Ausgleichs-Polynomfunktion 2-ten Grades (also $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $y = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$) durch diese Punkte.

Aufgabe 2. (V) Sei $L \subseteq \mathbb{R}^4$ die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \qquad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der Lösungsraum des zugehörigen homomogenen Gleichungssystems.

(a) Zeigen Sie, dass $L \neq \varnothing$ gilt; geben Sie eine Lösung $v_1 \in L$ an.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U (bezüglich des Standard-Skalarprodukts).

(c) Bestimmen Sie die eindeutige Lösung $v_0 \in L$ mit kleinster Euklidischer Norm (siehe Satz 19.8).

Aufgabe 3. (V) Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind (über $K = \mathbb{R}$). Bestimmen Sie im Fall einer linearen Abbildung jeweils Basen für den Kern und das Bild von φ.

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^2 + 1 \\ x + y + z \end{bmatrix}$

(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}$

(c) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto 2x - y + z$

(d) $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$

Aufgabe 4. (**S**, 12=2+3+4+3 Punkte)
Sei $K = \mathbb{F}_3$, $V = K[X]_{\leq 3}$ und $W = K[X]_{\leq 1}$ (wie in Beispiel 18.1 definiert). Wir definieren eine Abbildung $\varphi\colon V \to W$ durch $\varphi(f) := f(-1)X - f(1)$ für $f \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist.
(b) Zeigen Sie, dass $B := \{X - 1, X + 1, X^2 + 1, X^3 + 1\}$ eine Basis von V ist.
(c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $A = M_C^B(\varphi)$ (siehe Skript, S. 95) für die Basen B (wie in (b)) von V und $C = \{1, X\}$ von W.
(d) Bestimmen Sie Rang(A), $\dim \operatorname{Kern}(\varphi)$ sowie eine Basis von Bild(φ).

Aufgabe 5. (V) Seien V, W Vektorräume über dem Körper K. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Kann es sein, dass $\dim V = 11$ und $\dim \mathrm{Bild}(\varphi) = \dim \mathrm{Kern}(\varphi)$ gilt?

(b) Kann es sein, dass $\dim V = 4$, $\dim W = 2$ und $\dim \mathrm{Kern}(\varphi) = 1$ gilt?

(c) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ so dass das Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ l.u. ist. Zeigen Sie: Ist φ injektiv, so ist auch das Tupel $(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$ l.u.

(d)(Z) Sei U ein weiterer K-Vektorraum und $\psi\colon U \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch die Hintereinanderaufführung $\varphi \circ \psi\colon U \to W$ eine lineare Abbildung ist. Zeigen Sie:

$$\varphi \circ \psi = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Bild}(\psi) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi).$$

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Woche 31. Januar - 4. Februar in den Übungsgruppen.