12. Übungsblatt zu Mathematik 1 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2021/22

Aufgabe 1. (V) Gegeben seien die folgenden Spaltenvektoren in $V = \mathbb{Q}^4$:

$$u_1 := \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}, \qquad u_2 := \begin{bmatrix}3\\4\\2\\1\end{bmatrix}, \qquad u_3 := \begin{bmatrix}5\\8\\3\\0\end{bmatrix}, \qquad v := \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad w := \begin{bmatrix}4\\4\\3\\3\end{bmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine kurze Begründung (ohne Rechnungen!), dass die Menge $\{u_1, u_2, u_3, v, w\}$ keine Basis von $\mathbb{Q}^4$ ist.

(b) Bestimmen Sie, ob das Tupel (u_1, u_2, u_3) linear abhängig ist oder nicht.

(c) Sei $U := \langle u_1, u_2, u_3\rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq V$. Bestimmen Sie $\dim U$. Bestimmen Sie, ob $v \in U$ bzw. $w \in U$ gilt.

Aufgabe 2. (V) Sei $V = P_3(\mathbb{Q}) = \langle 1, X, X^2, X^3\rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{Q}[X]$ wie in Beispiel 18.1 der Vorlesung. Gegeben seien die Teilräume

$$U_1 := \{f \in V \mid f(1) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 := \langle X^2 + 1, X^3 + 1\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

Bestimmen Sie die Dimensionen von U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$; geben Sie jeweils für jeden dieser Teilräume eine Basis an.

Aufgabe 3. (**S**, 10=(3+3+2)+2 Punkte)
(a) Gegeben sei die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 5}.$$

Seien $\mathrm{ZR}(A) \subseteq \mathbb{Q}^4$ der Zeilenraum von A und $\mathrm{SR}(A) \subseteq \mathbb{Q}^5$ der Spaltenraum von A.

- (i) Seien $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{Q}^{1\times 5}$ die Zeilen von A. Nach Satz 18.6 der Vorlesung gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ so dass $B := \{w_i \mid i \in I\}$ eine Basis von $\mathrm{ZR}(A)$ ist. Bestimmen Sie eine solche Teilmenge I.
- (ii) Seien $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{Q}^{4\times 1}$ die Spalten von A. Bestimmen Sie analog eine Teilmenge $J \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, so dass $C := \{v_j \mid j \in J\}$ eine Basis von $\mathrm{SR}(A)$ ist.
- (iii) Bringen Sie A auf Stufenform und bestimmen Sie damit eine weitere Basis von $\mathrm{ZR}(A)$ (wie in Beispiel 18.7 der Vorlesung).

(b) Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Bestimmen Sie, ob $\sqrt{3} \in \langle 1, \sqrt{2}\rangle_{\mathbb{Q}}$ gilt oder nicht.

Aufgabe 4. (Z) Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Gegeben seien $f_1, \ldots, f_n \in V$. Zeigen Sie: Gibt es $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ so dass die Matrix $A = [f_i(x_j)]_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar ist, so ist das Tupel $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ linear unabhängig.

[*Hinweis:* Seien $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$ mit $s_1.f_1 + \ldots + s_n.f_n = \underline{0}$. Werten Sie diese Gleichung auf $x_1, \ldots, x_n$ aus.]

(b) Gegeben seien $f_1, f_2, f_3 \in V$ mit:

$$f_1(x) := \sin(\pi x), \qquad f_2(x) := |x-1|, \qquad f_3(x) := 2x^2 - 5$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, ob das Tupel (f_1, f_2, f_3) linear unabhängig ist oder nicht.

Aufgabe 5. (V) Gegeben seien die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B := \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Euklidische Norm $\|v_i\|$ für $i = 1, 2, 3$ (wie in §19 definiert).

(c) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Woche 24. - 28. Januar in den Übungsgruppen.