10. Übungsblatt zu Mathematik 1 für inf, swt, msv

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2021/22

Aufgabe 1. (V) (a) Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Nach Beispiel 15.2 der Vorlesung hat A zwei Eigenwerte, $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Bestimmen Sie zugehörige Eigenvektoren.

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_A \in \mathbb{Q}[X]$, die Eigenwerte von A sowie alle zugehörigen Eigenvektoren für die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}) \qquad \text{und} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2. (**S**, 12=4+4+4 Punkte) Gegeben sei die Matrix $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ für $t \in \mathbb{Q}$.

(a) Bestimmmen Sie alle $t \in \mathbb{Q}$ mit $\det(A(t)) \neq 0$.

(b) Sei $t \in \mathbb{Q}$ so, dass $\det(A(t)) = 0$ ist. Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_{A(t)} \in \mathbb{Q}[X]$, alle Eigenwerte von $A(t)$ (in $\mathbb{Q}$) und zugehörige Eigenvektoren.

(c) Sei $t \in \mathbb{Q}$ so, dass $A(t)$ invertierbar ist. Bestimmen Sie $A(t)^{-1}$ mit Hilfe der Formel $A(t)^{-1} = \det(A(t))^{-1}\tilde{A}(t)$ wobei $\tilde{A}(t)$ die Adjunkte von $A(t)$ ist (siehe Folgerung 16.9 der Vorlesung).

Aufgabe 3. (V) Sei $n \geq 1$ und $A_n := [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{Q})$ die Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j, \\ -1 & \text{falls } i = j+1 \text{ oder } i = j-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie A_n für $n = 1, 2, 3, 4$ explizit hin und berechnen Sie $\det(A)$.

(b) "Raten" Sie mit den Ergebnissen aus (a) eine allgemeine Formel für $\det(A_n)$ und beweisen Sie diese Formel (z.B. mit vollständiger Induktion nach n).

Aufgabe 4. (V) (a) Berechnen Sie $\det(A)$ für $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & \sqrt{2} & \frac{165}{2} \\ \sqrt{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 20 & 1000 & 0 & 10 \\ 0 & -\frac{19}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

(b) Berechnen Sie $\det(A)$ für $A = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{5} & \bar{5} \\ \bar{7} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{11} & \bar{3} & \bar{9} \end{bmatrix} \in M_3(K)$ und die beiden Fälle $K = \mathbb{F}_7$ und $K = \mathbb{F}_{13}$.

Hinweis zu (a) : Benutzen Sie geschickt elementare Zeilen- und Spaltenumformungen.

Aufgabe 5. (V) Sei K ein Körper.

(a) Sei $K = \mathbb{R}$. Geben Sie unendlich viele Matrizen $A \in M_2(\mathbb{R})$ an, so dass A gar keine Eigenwerte (in $\mathbb{R}$) besitzt.
(b) Sei $\mu_A \in K[X]$ das Minimalpolynom von $A \in M_n(K)$; sei $\mu_A = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_1X + a_0$ mit $d \geq 1$ und $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1} \in K$. Zeigen Sie: A ist invertierbar genau dann, wenn $a_0 \neq 0$ gilt.
(c) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage im Allgemeinen falsch ist:
$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ für $A, B \in M_n(K)$.

Aufgabe 6. (V) Stimmen Sie jeweils den normierten ggT der folgenden beiden Polynome (siehe z.B. Bemerkung 15.9.) :

(a) $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $\quad f = 4X^4 - 6X^3 + 2X^2 - 11X + 12,\ g = 2X^3 - 3X^2 + 6X - 9.$

(b) $p, q \in \mathbb{F}_3[X]$, $\quad p = X^6 + \bar{2}X + \bar{1},\ q = \bar{2}X^4 + \bar{2}X^3 + \bar{2}X^2 + X + \bar{2}.$

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche* Aufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Woche 10. - 14. Januar in den Übungsgruppen.