Scheinklausur zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. L. Iancu

WiSe 2022/23, 3. Februar 2023, 14:00 - 16:00

In Aufgabe 1 und 2 brauchen Sie nur die Lösung anzugeben; Zwischenschritte oder Begründungen sind nicht erforderlich (und werden auch nicht bewertet). Bei Aufgabe 3 gehören präzise Begründungen, Zwischenrechnungen etc. mit zur Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 1. (8=2+3+3 Punkte) Geben Sie hier nur die Antworten an:

(a) Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}_{13}$. Finden Sie $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 12\}$, so dass $\overline{8} \cdot \overline{a} = \overline{1}$ in $\mathbb{F}_{13}$ gilt.

(b) Schreiben Sie die komplexe Zahl $z := \dfrac{1}{1+2i} - \dfrac{2}{2+i} \in \mathbb{C}$ in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Gegeben seien die Polynome $f := X^3 - X + 1$ und $g := X + 2$ in $\mathbb{Q}[X]$. Finden Sie $q \in \mathbb{Q}[X]$ und $r \in \mathbb{Q}$ mit $f = g * q + r$. (Benutzen Sie zum Beispiel das Horner-Schema oder Teilen mit Rest, oder machen Sie einfach einen Ansatz mit $q = X^2 + aX + b$, wobei a, b sowie r zu bestimmen sind).

Aufgabe 2. (9=3+3+3 Punkte) Geben Sie hier nur die Antworten an:

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems über dem Körper $K = \mathbb{Q}$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \qquad 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \qquad -x_1 - x_2 + 2x_3 = 2.$$

(b) Gegeben sei $A = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_3)$. Ist A invertierbar? Wenn ja, so geben Sie A^{-1} an (wobei die Einträge von A^{-1} also $\bar{0}, \bar{1}$ oder $\bar{2}$ sind).

(c) Nach Vorlesung hat ein Polynom $\underline{0} \neq f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad n höchstens n Nullstellen in $\mathbb{Q}$. Sei nun $f := X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Gibt es auch nur höchstens 2 Matrizen $A \in M_2(\mathbb{Q})$ mit $f(A) = 0_{2\times 2}$? Wenn nein, so geben Sie mindestens 3 Matrizen A an mit $f(A) = 0_{2\times 2}$.

Aufgabe 3. (11=2+3+2+4 Punkte) Hier sind präzise Begründungen, Zwischenrechnungen etc. Teil der Lösung.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & -6 & -6 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$.

(a) Berechnen Sie A^2.

(b) Sei $f := X^2 - X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie, dass f das Minimalpolynom von A ist.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(d) Für jeden Eigenwert λ von A, bilden Sie die Matrix $A - \lambda I_4$ und bestimmen Sie dann eine Basis des Lösungsraums $N(A - \lambda I_4)$ des homogenen LGS mit der Matrix $A - \lambda I_4$.
(Nach Vorlesung sind die Vektoren in $N(A - \lambda I_4) \setminus \{0_4\}$ genau die zu λ gehörigen Eigenvektoren.)