9. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

WiSe 2022/23

Aufgabe 1. (V) Gegeben sei die (5×6)-Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- **(a)** Bringen Sie $A \in \mathbb{Q}^{5\times 6}$ mittels Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform.
- **(b)** Sei $p = 5$. Ersetzen Sie jede Ziffer k in A durch $\bar{k} \in \mathbb{F}_p$ und fassen Sie damit A als Matrix in $(\mathbb{F}_p)^{5\times 6}$ auf. Bringen Sie dann A mittels Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform.
- **(c)** Analog wie (b), aber nun mit $p = 2$.

Notieren Sie dabei in jedem Schritt, welche elementare Zeilenumformung Sie verwendet haben.

Aufgabe 2. (**S**, 9=3+3+3 Punkte) Gegeben seien die folgenden linearen Gleichungssysteme über dem jeweils angegebenen Körper:

(a) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + z = 7 \\ x - 2y = 7 \\ x + y + z = 4 \\ \qquad \text{über } \mathbb{Q}. \end{cases}$
(b) $\begin{cases} -x + 6y + 18z = -3 \\ 2x - 2y - 6z = 1 \\ -2x + 2y + 6z = 2 \\ \qquad \text{über } \mathbb{C}. \end{cases}$
(c) $\begin{cases} \bar{2}x + \bar{3}y + \bar{4}z = \bar{5} \\ x + \bar{2}y + z = \bar{3} \\ \qquad \text{über } \mathbb{F}_7. \end{cases}$

Stellen Sie jeweils die zugehörige erweiterte Matrix $[A|b]$ auf und bringen Sie diese mit dem Gauß-Verfahren auf Stufenform. Bestimmen Sie dann jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Aufgabe 3. (V) Sei K ein Körper und $a \in K$ fest. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von a) die Lösungsmenge des LGS: $\quad ax + y + z = 1, \quad x + ay + z = 1, \quad x + y + az = 1.$

Aufgabe 4. (V) Sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- **(a)** Für jedes $b \in K^n$ ist das lineare Gleichungssystem mit erweiterter Matrix $[A \mid b]$ lösbar.
- **(b)** Es gibt ein $b \in K^n$ so dass das lineare Gleichungssystem mit erweiterter Matrix $[A \mid b]$ eine eindeutige Lösung besitzt.
- **(c)** Das homogene lineare Gleichungssystem mit Matrix A besitzt nur die Lösung 0_n.

(d) Für jedes $b \in K^n$ besitzt das lineare Gleichungssystem mit erweiterter Matrix $[A \mid b]$ eine eindeutige Lösung.

(e) A ist invertierbar.

Aufgabe 5. (**S**, 7=4+3 Punkte)

(a) Sei $K = \mathbb{Q}$. Sind die folgenden Matrizen invertierbar?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort. (Aufgabe 4 kann nützlich sein).
Wenn ja, so bestimmen Sie die inverse Matrix.

(b) Sei K ein Körper. Für welche $x \in K$ ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ invertierbar?

Aufgabe 6. (Z) Sei K ein Körper. In der Vorlesung wurden die Elementarmatrizen $M_i(c)$, $I_{ij}(c)$ und V_{ij} definiert (siehe Skript, Seite 49). Zeigen Sie, dass sich V_{ij} als Produkt von Elementarmatrizen der ersten beiden Formen schreiben lässt.

D.h., im Gauß-Verfahren könnte man theoretisch auch ganz auf die Operation "Vertausche 2 Zeilen" verzichten. Aber man behält diese Operation trotzdem bei, weil es natürlich effizienter ist, in einer Matrix einfach direkt 2 Zeilen zu vertauschen, als das gleiche Ergebnis durch eine Folge von anderen Operationen zu erreichen.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche Aufgaben.*

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *In den Übungsgruppen Dienstag/Mittwoch 20./21. Dezember, oder online.*