8. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

WiSe 2022/23

Aufgabe 1. (**S**, 6=3+3 Punkte) Sei $\mathbb{Q}[X]$ der Polynomring über dem Körper $K = \mathbb{Q}$ mit der Unbestimmten X. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} X^k = \Big(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} X^i\Big) * \Big(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j\Big).$

(b) $\displaystyle\binom{m+n}{k} = \sum_{(i,j)\in I_k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{j}$ für alle $k \geq 0$, wobei $I_k := \{(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid i + j = k\}$.

[*Hinweis zu (a)*: Der Binomische Lehrsatz gilt auch für Elemente in dem Ring $R = \mathbb{Q}[X]$. Um (b) zu zeigen, vergleichen Sie in (a) den Koeffizienten von X^k auf beiden Seiten der Gleichung.]

Aufgabe 2. (V) Gegeben seien die folgenden Matrizen (mit Einträgen jeweils in $\mathbb{Q}$):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 8 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

und $F = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie alle möglichen Produkte unter diesen Matrizen.

Aufgabe 3. (**S**, 6=3+3 Punkte) Gegeben sei $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $M^2 - 3M + 2I_3 = O_{3\times 3}$.

(b) Die Matrix M ist invertierbar. Berechnen Sie M^{-1}. [Hinweis: Benutzen Sie (a).]

Aufgabe 4. (**S**, 6=2+2+2 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $A \in R^{m\times n}$. Sei $A^{\mathrm{tr}} \in R^{n\times m}$ wie in Bemerkung 11.8 der Vorlesung definiert (transponierte Matrix).

(a) Zeigen Sie, dass $(A \cdot B)^{\mathrm{tr}} = B^{\mathrm{tr}} \cdot A^{\mathrm{tr}}$ für alle $B \in R^{n\times p}$ gilt.

(b) Sei $m = n$ und A invertierbar. Zeigen Sie, dass auch A^{tr} invertierbar ist, mit $(A^{\mathrm{tr}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{tr}}$.

(c) Seien $v, w \in R^n$ Spaltenvektoren. Dann ist $v^{\mathrm{tr}} \cdot A \cdot w$ eine (1×1)-Matrix. (Überzeugen Sie sich davon.) Geben Sie eine Formel für den Eintrag dieser Matrix an.

Aufgabe 5. (V) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Gegeben sei eine quadratische Matrix $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(R)$. Dann heißt A *obere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ gilt für $1 \leq j < i \leq n$.

Zeigen Sie: Sind $A, B \in M_n(R)$ obere Dreiecksmatrizen, so ist auch das Produkt $C := A \cdot B \in M_n(R)$ eine obere Dreiecksmatrix. Schreiben wir $B = [b_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ und $C = [c_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$, so gilt $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$ für $1 \leq i \leq n$.

(Mit Transponieren folgt eine analoge Aussage auch für untere Dreiecksmatrizen.)

Aufgabe 6. (V) Zeigen Sie, dass die Menge der Matrizen

$$N := \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \qquad E := \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}, \qquad U := \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}, \qquad V := \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

mit Einträgen in $\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ bezüglich der in der Vorlesung definierten Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper bildet. Dieser wird mit $\mathbb{F}_4 := \{N, E, U, V\}$ bezeichnet. Geben Sie die Additions- und Multiplikationstabelle für $\mathbb{F}_4$ an.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche Aufgaben.*

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *In den Übungsgruppen Dienstag/Mittwoch 13./14. Dezember, oder online.*