7. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

WiSe 2022/23

Aufgabe 1. (**S**, 8=4+4 Punkte)
(a) Sei $\mathbb{F}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. Bestimmen Sie mit dem Verfahren in Beispiel 9.5 der Vorlesung die eindeutige Polynomfunktion $f \in P_2(\mathbb{F}_5)$ mit $\quad f(\overline{0}) = \overline{3}, \quad f(\overline{2}) = \overline{4}, \quad f(\overline{4}) = \overline{4}$.

(b) Sei K ein Körper, $n \geq 1$ und $f \in \hat{P}_n(K)$. Es gebe n paarweise verschiedene Elemente $c_1, \ldots, c_n \in K$ mit $f(c_i) = 0$ für $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, dass es ein $0 \neq a \in K$ gibt mit $f(x) = a(x - c_1) \cdots (x - c_n)$ für alle $x \in K$. [Hinweis: Horner-Schema und Induktion nach n.]

Aufgabe 2. (**S**, 5 Punkte) Sei K ein Körper und $\mathcal{F} = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, K)$. Für $f, g \in \mathcal{F}$ sei die Faltung $f * g \in \mathcal{F}$ wie im Skript Seite 38 definiert. Zeigen Sie, dass diese Verknüpfung assoziativ und kommutativ ist, d.h., es gilt

$$f * g = g * f \qquad \text{und} \qquad f * (g * h) = (f * g) * h \qquad \text{für alle } f, g, h \in \mathcal{F}.$$

Aufgabe 3. (V) In dieser Aufgabe geht es um das Rechnen mit komplexen Zahlen.

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$ wie folgt gegeben:

$$1) \quad z = (1+i)^{-1}, \qquad 2) \quad z = \frac{1}{i} + \frac{3}{1+i}, \qquad 3) \quad z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i}, \qquad 4) \quad z = \Big(\frac{1+i}{1-i}\Big)^{201}.$$

Bestimmen Sie jeweils $a, b \in \mathbb{R}$ mit $z = a + bi$.

(b) Welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ erfüllen die Gleichung $|z + 1| = |z - (1 + 2i)|$?
(Hier ist der komplexe Absolutbetrag $|\ |$ wie in Bemerkung 10.1 definiert.)

Aufgabe 4. (V) Verifizieren Sie die Formel $z = \big(\ldots\big)^2$ in Bemerkung 10.3 der Vorlesung.
Benutzen Sie dann diese Formel, um komplexe Zahlen $u \in \mathbb{C}$ zu finden mit:

(a) $u^2 = i$, **(b)** $u^2 = 3 + 4i$, **(c)** $u^2 - u + 1 = 0$, **(d)** $u^4 = -1 + i\sqrt{3}$.

Geben Sie jeweils auch u in Polardarstellung an (siehe Satz 10.5).

Aufgabe 5. (Z)
(a) Zeigen Sie das "Parallelogrammgesetz": $\quad |z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2 \quad$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

(b) Am Ende von §10 der Vorlesung sind Formeln für n-te Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ angegeben, wobei $n = 2, 3, 4, 5$. Finden Sie analoge Formeln für $n = 6, 8$. Können Sie die dortigen Formeln für $n = 5$

noch weiter vereinfachen, also $\cos(2k\pi/5)$ und $\sin(2k\pi/5)$ einfacher darstellen?

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche Aufgaben.*

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *In den Übungsgruppen Dienstag/Mittwoch 6./7. Dezember, oder online.*