5. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2022/23

Aufgabe 1. (**S**, 3 Punkte) Zeigen Sie die Aussage in Beispiel 5.2(d) der Vorlesung:

Die Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ (k,n) \mapsto 2^k(2n+1)-1$, ist bijektiv.

Aufgabe 2. (V) Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv, bijektiv? Falls die Abbildung nicht surjektiv ist, so versuchen Sie, das Bild der Abbildung zu bestimmen.

(a) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad x \mapsto \frac{1}{2}(x^2+x).$ (Beachte: x^2+x ist für $x \in \mathbb{Z}$ stets eine gerade Zahl.)

(b) $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x-2 & \text{falls } x > 1, \\ -x & \text{falls } -1 \leq x \leq 1, \\ x+2 & \text{falls } x < -1. \end{cases}$

(c) $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (l,m,n) \mapsto 2^l 3^m 5^n.$

(d) $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (l,m,n) \mapsto 2^l 3^m 6^n.$

(e) $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad S \mapsto S \cup \{37\}.$

(f) $f\colon \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid S \text{ endlich}\} \to \mathbb{R}, \quad S \mapsto |S| + \sqrt{|S|} + 1.$

Aufgabe 3. (V) Seien A, B, C nicht-leere Mengen und $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

(a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
(b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.
(c) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.
(d) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.
(e) Ist f injektiv und g surjektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.
(f) Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.

Aufgabe 4. (V)
(a) Finden Sie die Anzahl der Diagonalen eines regelmäßiges 10-Ecks (also eines 10-Ecks mit gleichen Kantenlängen und Innenwinkeln; siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Regelm%C3%A4%C3%9Figes_Polygon`). Dann verallgemeinern Sie das Ergebnis für ein regelmäßiges n-Eck mit $n \geq 3$ beliebig.

(b) Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Finden Sie die Anzahl der Teilmengen von A mit drei Elementen, die mindestens eine ungerade Zahl enthalten.

(c) Sei $B = \{1, 2, 3\}$ und $C = \{a, b, c, d, e\}$. Finden Sie die Anzahl der injektiven Abbildungen f von B nach C. Für wieviele davon gilt $f(1) \neq a$?

Aufgabe 5. (V)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}$.

(b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$.

(c) Zeigen Sie, dass $(k+1)\cdot\binom{n}{k} = \binom{n}{k} + n\cdot\binom{n-1}{k-1}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt. Danach zeigen Sie:

$$1 + 2\cdot\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \ldots + (n+1)\cdot\binom{n}{n} = 2^{n-1}(n+2).$$

(d) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Danach zeigen Sie:

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Aufgabe 6. (**S**, 4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und seien $A_1, \ldots, A_n$ abzählbar unendliche Mengen. Zeigen Sie, dass dann $A_1 \times \ldots \times A_n$ (siehe Beispiel 5.11 der Vorlesung) abzählbar unendlich ist. *Hinweis*: Behandeln Sie zuerst sorgfältig den Fall $n = 2$.

Zum Beispiel folgt damit, dass die Menge aller n-Tupel $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Q} \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$ abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 7. (Z) In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist. Zeigen Sie nun, dass die Menge $\{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid S \text{ endlich}\}$ abzählbar unendlich ist.

Hinweis: Suchen Sie im Internet nach "set of finite subsets of N" (oder Ähnlichem); Sie werden viele Ideen dazu finden (auch manche falsche). Suchen Sie sich eine aus, die korrekt ist und Ihnen am besten gefällt, und schreiben Sie das Argument sorgfältig auf.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche Aufgaben.*

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *In den Übungsgruppen Dienstag/Mittwoch 22./23. November, oder online.*