4. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2022/23

Aufgabe 1. (Schriftlich, 10=4+6 Punkte)

(a) Gegeben seien $a, b, m \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ und $m > 0$. Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$\text{Es gibt ein } x \in \mathbb{Z} \text{ mit } ax \equiv b \bmod m \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{ggT}(a, m) \mid b.$$

(b) Für jede der folgenden Kongruenzgleichungen, finden Sie entweder eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$, oder zeigen Sie, dass keine Lösung existiert.

$$99x \equiv 18 \bmod 30, \qquad 91x \equiv 84 \bmod 143, \qquad x^2 \equiv 2 \bmod 5,$$
$$x^2 + 1 \equiv 0 \bmod 8, \qquad x^2 + x + 1 \equiv 0 \bmod 5, \qquad x^2 + x + 1 \equiv 0 \bmod 7.$$

Aufgabe 2. (V) Zeigen Sie dass für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m, n, k \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen gelten

(a) $a \equiv b \bmod n \quad \Longrightarrow \quad a^k \equiv b^k \bmod n.$

(b) $a \equiv b \bmod n$ und $m \mid n \quad \Longrightarrow \quad a \equiv b \bmod m.$

(c) $a \equiv b \bmod n \quad \Longleftrightarrow \quad ma \equiv mb \bmod mn.$

(d) $ma \equiv mb \bmod n$ und $\mathrm{ggT}(n, m) = 1 \quad \Longrightarrow \quad a \equiv b \bmod n.$

((Z) Zusätzlicher Teil : Als Anwendung finden Sie die letzten zwei Ziffern von 11^{128}, 11^{256} und 11^{1030} — in der üblichen Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl, und ohne einen Computer zu benutzen.)

Aufgabe 3. (V) **(a)** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass n^2 kongruent zu 0 oder 1 modulo 3 ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass n^2 kongruent zu 0, 1 oder -1 modulo 5 ist.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $n^5 - n \equiv 0 \pmod{30}$.

(d) Finden Sie $r_i \in \{0, 1, \ldots, 12\}$ mit $\quad 93^{100} \equiv r_1 \pmod{13}$, $\quad 94^{100} \equiv r_2 \pmod{13}$, $96^{100} \equiv r_3 \pmod{13}$, $\quad 98^{100} \equiv r_4 \pmod{13}$, ohne einen Computer zu benutzen.

Hinweis : Zunächst bemerke dass $93 \equiv 2 \pmod{13}$ und $2^6 = 64 \equiv -1 \pmod{13}$ gelten und benutze danach Aufgabe 2 (a) ; analog, $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$ etc. Bei 7^{100} wird es ein bisschen komplizierter.

Aufgabe 4. (**S**, 9=3+3+3 Punkte) Wie in Beispiel 4.9 der Vorlesung sei $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Betrachte folgende Relation:

$$R := \{((n,m),(n',m')) \in A \times A \mid nm' = n'm\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Ein Paar $(n,m) \in A$ heißt gekürzt, wenn $\mathrm{ggT}(n,m) = 1$ gilt. Zeigen Sie, dass jede Äquivalenzklasse von R ein gekürztes Paar enthält.

(c) Zeigen Sie, dass $B := \{(n,m) \in A \mid (n,m) \text{ ist gekürzt}\}$ ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen ist.

Aufgabe 5. (V) Für $x, y \in \mathbb{Q}$ schreiben wir $x \preceq y$, wenn es $n, n' \in \mathbb{Z}$ und $m, m' \in \mathbb{N}$ gibt mit $x = n/m$, $y = n'/m'$ und $nm' \leq n'm$ (wobei $\leq$ die übliche Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$ ist; siehe Skript, S. 8 oben). Damit erhalten wir eine Relation R auf $\mathbb{Q}$; also $R := \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x \preceq y\}$.

(a) Zeigen Sie, dass R eine Ordnungsrelation ist, also reflexiv, anti-symmetrisch und transitiv.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x \preceq y$; sei $z \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie $x + z \preceq y + z$. Zeigen Sie außerdem:
Ist $0 \preceq z$, so gilt auch $x \cdot z \preceq y \cdot z$. Was passiert für $z \preceq 0$?

Aufgabe 6. (V) Seien A, B nicht-leere Mengen und $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Seien A_1, A_2 Teilmengen von A, sowie B_1, B_2 Teilmengen von B. Zeigen Sie:

(a) Aus $A_1 \subseteq A_2$ folgt auch $f(A_1) \subseteq f(A_2)$. Aus $B_1 \subseteq B_2$ folgt auch $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

(b) Es gilt $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ und $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Geben Sie ein Beispiel an, in dem $f(A_1 \cap A_2) \subsetneqq f(A_1) \cap f(A_2)$ gilt.

(c) Es gilt $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ und $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche Aufgaben.*

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *In den Übungsgruppen Dienstag/Mittwoch 15./16. November, oder online.*