3. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2022/23

Aufgabe 1. (**S**, 10=(2+2+2)+1+3 Punkte)
Gegeben seien $a, b \in \mathbb{N}$. Sei A die Menge aller $k \in \mathbb{N}$ mit $a \mid k$ und $b \mid k$. Dann ist $A \subseteq \mathbb{N}$ nichtleer (z.B., $ab \in A$), also gibt es ein kleinstes Element. Dieses kleinste Element wird mit $\mathrm{kgV}(a, b)$ bezeichnet und heißt das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b.

Nach dem Hauptsatz der elementaren Arithmetik gibt es Primzahlen $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ mit

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m} \qquad \text{und} \qquad b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_m^{b_m} \qquad \text{wobei} \qquad a_i, b_i \in \mathbb{N}_0.$$

(Hier können einige der Exponenten a_i, b_i gleich 0 sein. Zum Beispiel: Für $a = 40$ und $b = 36$ erhalten wir $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1$ und $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$ mit $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$.)

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt:

$$\mathrm{ggT}(a, b) = p_1^{\min(a_1,b_1)} p_2^{\min(a_2,b_2)} \cdots p_m^{\min(a_m,b_m)} \text{ und}$$
$$\mathrm{kgV}(a, b) = p_1^{\max(a_1,b_1)} p_2^{\max(a_2,b_2)} \cdots p_m^{\max(a_m,b_m)}.$$

(ii) Es gilt: $\quad ab = \mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b)$.

(iii) Für alle $k \in A$ gilt: $\quad \mathrm{kgV}(a, b) \mid k$.

(b) Für große Zahlen ist es im Allgemeinen schwierig, die Primfaktorzerlegung zu finden. Anstatt die Formel in (i) zu benutzen, können wir aber $\mathrm{ggT}(a, b)$ mit dem Euklidischen Algorithmus effizient berechnen (wobei nur Teilen mit Rest verwendet wird). Mit der Formel in (ii) können wir dann auch $\mathrm{kgV}(a, b)$ effizient berechnen.
Bestimmen Sie $\mathrm{kgV}(a, b)$ für alle Paare (a, b) in Aufgabe 5 auf Übungsblatt 2.

(c) Beweisen Sie die obige Formel $ab = \mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b)$, ohne die Primfaktorzerlegung von a und b zu benutzen.

Aufgabe 2. (V) Gegeben seien $m_1, m_2, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\quad \mathrm{ggT}(m_1, n) = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}(m_2, n) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ggT}(m_1 m_2, n) = 1.$

(b) $\quad \mathrm{ggT}(m_1, m_2) = 1, \quad m_1 \mid n \quad \text{und} \quad m_2 \mid n \quad \Rightarrow \quad m_1 m_2 \mid n.$

(c) $\quad n \mid m_1 m_2 \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}(n, m_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad n \mid m_2.$

Aufgabe 3. (**S**, 9=3+3+3 Punkte)
(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass n ein Quadrat ist, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = m^2$. Seien nun $a, b \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Zeigen Sie: Ist ab ein Quadrat, so sind sowohl a als auch b Quadrate.

(b) Zeigen Sie, dass es kein $x \in \mathbb{Q}$ gibt mit $x^3 = 6$.

(c) Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Es gibt $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_1 \mid a$, $b_1 \mid b$, $\mathrm{ggT}(a_1, b_1) = 1$ und $\mathrm{kgV}(a, b) = a_1 b_1$.

Aufgabe 4. (V)
(a) Bestimmen Sie alle Paare von natürlichen Zahlen (a, b) mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 50$ und $\mathrm{kgV}(a, b) = 1500$.

(b) Mit welchen Zahlen kann man den Bruch $\dfrac{6n+17}{4n+8}$ kürzen ? (wobei $n \in \mathbb{N}$). Geben Sie Beispiele für jede mögliche solche Zahl.

(c) Sei $m \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\dfrac{m}{3} + \dfrac{m^2}{2} + \dfrac{m^3}{6} \in \mathbb{Z}$.

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen sie dass $120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$ gilt.

Aufgabe 5. (V)
(a) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ sodass $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

(c) Seien $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$ mit : $n \mid ad - bc$, $\quad n \mid a - b$, $\quad \mathrm{ggT}(n, b) = 1$. Zeigen Sie, dass $n \mid c - d$.

(d) Teilen Sie $15! + 200$ mit Rest durch 182. (ohne Taschenrechner; $182 = 13 \cdot 14$ ist gegeben).

Aufgabe 6. (Z)
(a) Jeden Tag fahren Züge von Stuttgart nach Zürich. Nehmen wir an, es fährt alle 7 Stunden so ein Zug, jeweils zur vollen Stunde. Zeigen Sie, dass an mindestens einem Tag der Woche ein solcher Zug um 9 Uhr morgens fährt.

(b) Im Supermarkt werden Beutel mit 4 Äpfeln und mit 9 Äpfeln angeboten. Zeigen Sie, dass es für jede natürliche Zahl $n > 23$ möglich ist, genau n Äpfel zu kaufen (unter der Annahme, dass man genügend Geld dabei hat …). Will man zum Beispiel $n = 35$ Äpfel kaufen, so wählt man 2 Beutel mit 4 Äpfeln und 3 Beutel mit 9 Äpfeln. Was passiert, wenn man genau 23 Äpfel kaufen will?

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert ; zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* sind mit (V) markiert ; die *zusätzliche* Aufgaben sind mit (Z) markiert.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In den Übungsgruppen Dienstag/Mittwoch 8./9. November, oder online.