2. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2022/23

Aufgabe 1. (V) Seien P und Q Aussagen.

Zeigen sie mit Hilfe der entsprechenden Wahrheitstabelle, dass die folgende Verknüpfung immer wahr ist:

$$\big(((\neg P) \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \Rightarrow (\neg Q))\big) \Rightarrow P.$$

(Bemerkung: Diese bildet die Grundlage des Widerspruchsbeweises. Wir wollen zeigen, dass P wahr ist. Nehmen wir an, dass P falsch ist, und betrachten eine weitere Aussage Q. Wenn wir dann sowohl Q als auch $\neg Q$ als wahr herleiten können, haben wir einen Widerspruch produziert. Also war die Annahme falsch, d.h., P ist wahr.)

Zur Erinnerung: Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt $n! := 1 \cdot 2 \cdots n$ die Fakultät von n. (Zum Beispiel: $1! = 1$, $3! = 6$.)

Aufgabe 2. (V) Berechnen Sie die folgenden Summen :

(a) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$ (b) $\sum_{k=1}^{n} k^2$ (c) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ (d) $\sum_{k=1}^{n} (k! \cdot k)$.

Aufgabe 3. (**S**, 9 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \neq y$ ist $x - y$ ein Teiler von $x^n - y^n$.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 5 ein Teiler von $2^{3n} - 3^n$.
Hinweis: $x^{n+1} - y^{n+1} = x^{n+1} - xy^n + xy^n - y^{n+1}$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt $n! > 2^n > n^2$.

Aufgabe 4. (V+Z) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 8$ existieren $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 3a + 5b$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 6 ein Teiler von $13^n + 7^n - 2$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 19 ein Teiler von $7 \cdot 25^n + 2 \cdot 6^{n+1}$.

(e)(Z) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist 64 ein Teiler von $3^{2n+3} + 40n - 27$.

Aufgabe 5. (**S**, 9 Punkte) Bestimmen Sie für jedes der folgenden Paare (a, b) natürlicher Zahlen ihren ggT sowie ganze Zahlen s, t mit $\mathrm{ggT}(a, b) = sa + tb$:
(i) $a = 17$, $b = 29$, **(ii)** $a = 552$, $b = 713$, **(iii)** $a = 11253$, $b = 2607$.

Aufgabe 6. (V) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass es mindestens eine Primzahl p gibt mit $n < p < n!$. (*Hinweis :* Betrachten Sie die Primzahlzerlegung von $n! - 1$.) Schließen Sie damit, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 7. (Z) Jedes Jahr gibt es eine bestimmte Anzahl von gesetzlichen Feiertagen (die teilweise vom Bundesland abhängen). Einige davon fallen immer auf das gleiche Datum (Beispiel: 1. Mai), bei anderen wechselt das Datum. Ein Beispiel für Letzteres ist das Osterdatum, also das Datum des Ostersonntags. Dazu gibt es eine lange Geschichte (siehe etwa den entsprechenden wikipedia-Artikel), und tatsächlich haben sich Mathematiker darum bemüht, Formeln für die Berechnung des Osterdatums aufzustellen: dabei geht wesentlich der "mod" Operator ein!

Schauen Sie sich die Gaußsche Osterformel an, siehe

`https://de.wikipedia.org/wiki/Gaußsche_Osterformel`

und berechnen Sie damit das Osterdatum für Ihr Geburtsjahr.

Aufgabe 8. (Z) Wir zeigen mit vollständiger Induktion: *Alle natürlichen Zahlen sind gleich.*

BEWEIS. Für $a, b \in \mathbb{N}$ definieren wir dazu $\max(a, b)$ als das Maximum von a, b. (Zum Beispiel ist $\max(2, 5) = 5$ und $\max(3, 3) = 3$.) Seien nun $a, b \in \mathbb{N}$. Wir zeigen $a = b$ mit Induktion nach $n = \max(a, b)$. Induktionsanfang: Ist $n = \max(a, b) = 1$, so folgt $a = b = 1$, also gilt die Behauptung. Nun zum Induktionsschritt. Sei $n \geq 1$ und angenommen, die Behauptung gilt für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $n = \max(a, b)$. Seien nun $a', b' \in \mathbb{N}$ mit $\max(a', b') = n + 1$. Dann ist $\max(a' - 1, b' - 1) = n$, also nach Induktionsannahme $a' - 1 = b' - 1$ und damit auch $a' = b'$. $\square$

Die Aussage ist offenbar nicht richtig, aber wo liegt der Fehler im obigen Beweis?

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche Aufgaben.*

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *In der Vorlesung oder den Übungsgruppen am Mittwoch 2. November, oder online.*