

# Bonus-Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

WiSe 2022/23

Mit diesem Übungsblatt können Sie eventuell noch fehlende Punkte für den Schein erwerben. Ihre schriftlichen Bearbeitungen geben Sie bitte online bei Ihren Tutorinnen ab, bis Mittwoch 15. Februar.

**Aufgabe 1.** (S, 6=2+2+2 Punkte)

- (a) Teilen Sie  $f = X^4 + \bar{2}X^3 + \bar{3}X^2 + \bar{1} \in \mathbb{F}_5[X]$  mit Rest durch  $g = X^2 + \bar{2} \in \mathbb{F}_5[X]$ .
- (b) Wir betrachten den Körper  $\mathbb{F}_{13}$ . Finden Sie das eindeutige  $a \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$  mit  $\bar{5} \cdot a = \bar{7}$ .
- (c) Schreiben Sie die komplexe Zahl  $z := \left(\frac{3i}{1+2i}\right)^2 \in \mathbb{C}$  in der Form  $z = a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 2.** (S, 5=3+1+1 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper und  $A \in K^{m \times n}$ . Sei  $N(A) = \{x \in K^n \mid A \cdot x = 0_m\}$  der Lösungsraum des homogenen LGS mit Matrix  $A$ . Zeigen Sie: Es gilt  $\dim N(A) \geq n - m$ .

Geben Sie ein Beispiel an mit  $\dim N(A) > n - m \geq 0$  und ein Beispiel mit  $N(A) = n - m \geq 0$ .

**Aufgabe 3.** (S, 6=3+3 Punkte) Sei  $K$  ein Körper. Nach Blatt 12, Aufgabe 2(c), ist

$$\text{Sym}_n(K) := \{A \in M_n(K) \mid A^{\text{tr}} = A\} \quad \text{ein Teilraum von } M_n(K).$$

- (a) Bestimmen Sie eine Basis von  $\text{Sym}_n(K)$  und zeigen Sie damit  $\dim \text{Sym}_n(K) = n(n+1)/2$ . (Hinweis: Seien  $E_{ij}^{(n,n)}$  die Standard-Matrizen wie in Beispiel 16.8 der Vorlesung. Für  $i = j$  ist offenbar  $E_{ii}^{(n,n)} \in \text{Sym}_n(K)$ ; für  $i \neq j$  betrachte  $E_{ij}^{(n,n)} + E_{ji}^{(n,n)}$ .)
- (b) Definiere  $\varphi: M_n(K) \rightarrow M_n(K)$  durch  $\varphi(A) := A + A^{\text{tr}}$  für alle  $A \in M_n(K)$ . Zeigen Sie, dass  $\varphi$  linear ist, mit  $\text{Bild}(\varphi) \subseteq \text{Sym}_n(K)$ . Außerdem:  $\text{Bild}(\varphi) = \text{Sym}_n(K) \Leftrightarrow 1 + 1 \neq 0$  in  $K$ .

**Aufgabe 4.** (S, 9=3+3+3 Punkte) Gegeben seien die folgenden Messwerte: 
$$\begin{array}{c|ccccc} t_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y_i & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Bestimmen sie die Gleichung der Ausgleichs-Polynomfunktion 2-ten Grades (also  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  mit  $y = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ ) durch diese Punkte; siehe Beispiel 18.7 der Vorlesung. Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor: Seien

$$y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}, \quad u_1 := \begin{bmatrix} t_1^2 \\ t_2^2 \\ t_3^2 \\ t_4^2 \\ t_5^2 \end{bmatrix}, \quad u_2 := \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{bmatrix}, \quad u_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad U := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

- (i) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis  $\{w_1, w_2, w_3\}$  von  $U$  (z.B. mit Gram-Schmidt).
- (ii) Bestimmen Sie  $u_0 := \frac{\langle w_1, y \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle w_2, y \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 + \frac{\langle w_3, y \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 \in U$  (wie in Lemma 18.6).

(iii) Bestimmen Sie  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  mit  $u_0 = a_2u_1 + a_1u_2 + a_0u_3$ . Dann ist die Ausgleich-Polynomfunktion gegeben durch  $y(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$  für  $t \in \mathbb{R}$ . Skizzieren Sie diese Funktion sowie die Punkte  $(t_i, y_i)$  in der  $\mathbb{R}^2$ -Ebene (mit horizontaler Achse  $t$  und vertikaler Achse  $y$ ).

**Aufgabe 5.** (S, 11=2+4+3+2 Punkte) Sei  $A = \begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ 0 & \bar{2} & 0 & 0 \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{4} & 0 \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{F}_5)$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\lambda_1 := \bar{0}$  und  $\lambda_2 := \bar{2}$  Eigenwerte von  $A$  sind.
- (b) Betrachte die Teilräume  $U_i := N(A - \lambda_i I_4) = \{x \in \mathbb{F}_5^4 \mid A \cdot x = \lambda_i x\} \subseteq \mathbb{F}_5^4$  für  $i = 1, 2$ . (Nach Bemerkung 14.1 der Vorlesung sind also die Vektoren in  $U_i \setminus \{0_4\}$  genau die zu  $\lambda_i$  gehörigen Eigenvektoren von  $A$ .) Bestimmen Sie Basen  $B_i$  von  $U_i$ .
- (c) Zeigen Sie, dass  $B := B_1 \cup B_2$  eine Basis von  $\mathbb{F}_5^4$  ist. Sei  $T \in M_4(\mathbb{F}_5)$  die invertierbare Matrix mit Spalten gegeben durch die Vektoren in  $B$ . Bestimmen Sie  $T^{-1} \cdot A \cdot T$ .
- (d) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von  $A$ .

**Aufgabe 6.** (S, 3 Punkte) Sei  $K$  ein Körper und  $A \in M_n(k)$ . Zeigen Sie, dass  $A$  und  $A^{\text{tr}}$  das gleiche Minimalpolynom haben.

**Aufgabe 7.** (S, 4=2+2 Punkte)

- (a) Gegeben seien  $K$ -Vektorräume  $V, W$  und eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow W$ . Kann es sein, dass  $\dim V = 7$ ,  $\dim W = 2$  und  $\dim \text{Kern}(\varphi) = 4$  gilt? (Begründen Sie Ihre Antwort.)
- (b) Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim V = 7$ . Gegeben seien Teilräume  $U_1, U_2 \subseteq V$  mit  $\dim U_1 = \dim U_2 = 5$  und  $V = U_1 + U_2$ . Bestimmen Sie  $\dim(U_1 \cap U_2)$ .

**Aufgabe 8.** (S, 6=2+2+2 Punkte)

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\varphi: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung mit  $\varphi \circ \varphi = \varphi$ . Zeigen Sie:

- (a) Es gilt  $v - \varphi(v) \in \text{Kern}(\varphi)$  für alle  $v \in V$ .
- (b) Es gilt  $\text{Kern}(\varphi) \cap \text{Bild}(\varphi) = \{0_V\}$  und  $V = \text{Kern}(\varphi) + \text{Bild}(\varphi)$ .
- (c) Jedes  $v \in V$  lässt sich auf eindeutige Weise schreiben als  $v = u + w$  mit  $u \in \text{Kern}(\varphi)$  und  $w \in \text{Bild}(\varphi)$ .

**Aufgabe 9.** (S, 4 Punkte) Sei  $U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{Q}^3$ .

Zeigen Sie, dass  $\dim U = 2$  gilt; bestimmen Sie eine Matrix  $A \in \mathbb{Q}^{1 \times 3}$  mit  $U = N(A)$  (siehe Beispiel 19.12 der Vorlesung).