14. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

WiSe 2022/23

Aufgabe 1. (V) Gegeben seien die folgenden Vektoren in $V = \mathbb{F}_5^3$: $\qquad v_1 = \begin{bmatrix} \bar{4} \\ \bar{3} \\ \bar{3} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{3} \\ \bar{2} \end{bmatrix}.$

(a) Zeigen Sie, dass das Tupel (v_1, v_2) linear unabhängig ist.

(b) Sei $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standard-Basis von V. Nach dem Basisergänzungssatz 17.14 gibt es ein $j \in \{1, 2, 3\}$ so dass $\{v_1, v_2, e_j\}$ eine Basis von V ist. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für j.

Aufgabe 2. (V) Wir betrachten $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Gegeben seien Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$; sei $T \in M_n(\mathbb{R})$ die Matrix mit Spalten $v_1, \ldots, v_n$.

(a) Zeigen Sie: Für $1 \leq i, j \leq n$ gilt: $\quad \langle v_i, v_j \rangle = (i, j)$-Eintrag von $T^{\text{tr}} \cdot T$.

(b) Zeigen Sie: $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $T^{\text{tr}} \cdot T = I_n$ gilt.

Wir bezeichnen T als **orthogonale Matrix**, wenn $T^{\text{tr}} \cdot T = I_n$ gilt. In diesem Fall ist also T invertierbar, und T^{-1} ist auf sehr einfache Weise gegeben, nämlich $T^{-1} = T^{\text{tr}}$.

(c) Seien $T, T' \in M_n(R)$ orthogonale Matrizen. Zeigen Sie, dass T^{-1}, T^{tr} und $T \cdot T'$ ebenfalls orthogonale Matrizen sind. Ist $T + T'$ auch orthogonal?

(d) Sei $n = 3$ und $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sei eine orthogonale Matrix $T \in M_3(\mathbb{R})$, deren 1. Spalte durch v_1 gegeben ist. (Hinweis: Basisergänzungssatz + Gram–Schmidt Verfahren.)

Aufgabe 3. (V) Gegeben seien die folgenden Messwerte: $\quad (i = 1, \ldots, 5)$.

t_i	0	1	2	3	4
y_i	2	1	0	-1	1

Bestimmen Sie die Gleichung der Ausgleichsgeraden durch die Punkte (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, 5$; siehe Beispiel 18.7 der Vorlesung. Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor: Seien

$$y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}, \qquad u_1 := \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{bmatrix}, \qquad u_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad U := \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

(i) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis $\{w_1, w_2\}$ von U (z.B. mit dem Gram–Schmidt Verfahren).

(ii) Bestimmen Sie $u_0 := \dfrac{\langle w_1, y \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \dfrac{\langle w_2, y \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 \in U$ (wie im Beweis von Lemma 18.6).

(iii) Bestimmen Sie $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ mit $u_0 = a_0 u_1 + b_0 u_2$. Dann ist die Ausgleichgerade gegeben durch $y(t) = a_0 t + b_0$ für $t \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie diese Gerade sowie die Punkte (t_i, y_i) in der $\mathbb{R}^2$-Ebene (mit horizontaler Achse t und vertikaler Achse y).

Aufgabe 4. (V) Sei $L \subseteq \mathbb{R}^4$ die Lösungsmenge des inhomogenen LGS:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \qquad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der Lösungsraum des zugehörigen homogenen LGS.

(a) Zeigen Sie, dass $L \neq \varnothing$ gilt; geben Sie eine Lösung $v_1 \in L$ an.

(b) Bestimmen Sie zuerst eine Basis von U (gemäß Satz 16.12 der Vorlesung) und dann eine Orthogonalbasis (mit dem Gram–Schmidt Verfahren).

(c) Nach Satz 18.8 der Vorlesung gibt es ein eindeutiges $x_0 \in L$ mit $\|x_0\| < \|x\|$ für alle $x \in L$ mit $x \neq x_0$. Finden Sie dieses x_0.

Aufgabe 5. (V) Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen linear über dem jeweils angegebenen Körper K sind. Bestimmen Sie im Fall einer linearen Abbildung jeweils Basen für Kern und Bild von φ.

(i) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^2+1 \\ x+y+z \end{bmatrix}$

(ii) $\varphi\colon \mathbb{F}_5^2 \to \mathbb{F}_5^3, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ \bar{2}x \\ x+\bar{4}y \end{bmatrix}$

(iii) $\varphi\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto 2x - y + z$

(iv) $\varphi\colon \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_3^3, \quad x \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x^3 \\ \bar{2}x \end{bmatrix}.$

Aufgabe 6. (V) Seien V, W Vektorräume über dem Körper K. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ so dass das Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ l.u. ist.
Zeigen Sie: Ist φ injektiv, so ist auch das Tupel $(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$ in W l.u.

(b) Kann es sein, dass $\dim V = 5$ und $\text{Bild}(\varphi) = \text{Kern}(\varphi)$ gilt? Kann es sein, dass $\dim V = 4$, $\dim W = 2$ und $\dim \text{Kern}(\varphi) = 1$ gilt? (Hinweis: Kern-Bild-Dimensionssatz.)