13. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

WiSe 2022/23

Aufgabe 1. (**S**, 9=3+3+3 Punkte) Gegeben seien die folgenden Spaltenvektoren in $V = \mathbb{Q}^4$:

$$u_1 := \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}, \qquad u_2 := \begin{bmatrix}3\\4\\2\\1\end{bmatrix}, \qquad u_3 := \begin{bmatrix}5\\8\\3\\0\end{bmatrix}, \qquad v := \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad w := \begin{bmatrix}4\\4\\3\\3\end{bmatrix}.$$

(a) Sei $U := \langle u_1, u_2, u_3\rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq V$. Bestimmen Sie, ob $v \in U$ bzw. $w \in U$ gilt.

(b) Bestimmen Sie, ob die Tupel (u_1, u_2, u_3) und (v, w) jeweils linear unabhängig sind in V. Ist (u_1, u_2, u_3, v, w) linear unabhängig? Gilt $V = \langle u_1, u_2, u_3, v, w\rangle_{\mathbb{Q}}$?

(c) Ersetzen Sie in obigen Spaltenvektoren jede Ziffer k durch $\bar{k}$ und betrachten Sie diese Spaltenvektoren damit als Elemente von $\mathbb{F}_3^4$ (wobei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen ist).
Sei $U' := \langle u_1, u_2, u_3\rangle_{\mathbb{F}_3} \subseteq V' := \mathbb{F}_3^4$. Bestimmen Sie, ob $v \in U'$ bzw. $w \in U'$ gilt.

Aufgabe 2. (V) Sei X eine nicht-leere Menge und K ein Körper. Wir betrachten den K-Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(X, K)$.

(a) Gegeben seien $f_1, \ldots, f_n \in V$. Zeigen Sie: Gibt es $x_1, \ldots, x_n \in X$ so dass die Matrix $A := [f_i(x_j)]_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K)$ invertierbar ist, so ist das Tupel $(f_1, \ldots, f_n)$ linear unabhängig in V.

[*Hinweis:* Sei $s_1.f_1 + \ldots + s_n.f_n = \underline{0}$ mit $s_i \in K$, wobei $\underline{0} \in V$ die Null-Funktion ist. Dann gilt $s_1 f_1(x) + \ldots s_n f_n(x) = 0$ für alle $x \in X$.]

(b) Eine Anwendung: Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Gegeben seien $f_1, f_2, f_3 \in V$ mit:

$$f_1(x) := \sin(\pi x), \qquad f_2(x) := |x - 1|, \qquad f_3(x) := 2x^2 - 5$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, ob das Tupel (f_1, f_2, f_3) linear unabhängig ist oder nicht. Sei $g \in V$ definiert durch $g(x) := -x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Gilt $g \in \langle f_1, f_2, f_3\rangle_{\mathbb{R}}$?

Aufgabe 3. (V) Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$.

(a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 := 1$ und $\lambda_2 := -1$ Eigenwerte von A sind.

(b) Betrachte die Teilräume $U_i := N(A - \lambda_i I_3) = \{x \in \mathbb{Q}^3 \mid A \cdot x = \lambda_i x\} \subseteq \mathbb{Q}^3$ für $i = 1, 2$. (Nach Bemerkung 14.1 der Vorlesung sind also die Vektoren in $U_i \setminus \{0_3\}$ genau die zu λ_i gehörigen Eigenvektoren von A.) Bestimmen Sie Basen B_i von U_i.

(c) Zeigen Sie, dass $B := B_1 \cup B_2$ eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

Aufgabe 4. (V) Sei K ein Körper und V ein beliebiger K-Vektorraum.

(a) Gegeben sei ein linear unabhängiges Tupel (v_1, v_2, v_3) in V. Bestimmen Sie alle $c \in K$, so dass das Tupel $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + cv_3)$ linear unabhängig ist.

(b) Gegeben seien ein linear unabhängiges Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ in V und ein $v \in V$ mit $v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$. Zeigen Sie, dass das Tupel $(v_1 + v, v_2 + v, \dots, v_n + v)$ linear unabhängig ist.

(c) Gegeben seien zwei linear unabhängige Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ in V. Ist dann auch das Tupel $(v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$ linear unabhängig? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

(d) Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ und $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Für $1 \leq i \leq n$ definiere $w_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \in V$. Zeigen Sie: Ist $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig und A invertierbar, so ist auch $(w_1, \dots, w_n)$ linear unabhängig.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche Aufgaben.*

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *In den Übungsgruppen Dienstag/Mittwoch 31. Januar/1. Februar, oder online.*