12. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

WiSe 2022/23

Aufgabe 1. (V) Wir betrachten $V = \mathbb{R}^2$ mit der üblichen Addition und einer skalaren Multiplikation $\mathbb{R} \times V \to V$ gegeben durch

(a) $\lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda x \\ y \end{bmatrix}$ **(b)** $\lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda x \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda^{-1} y \end{bmatrix}$ für $\lambda \neq 0$ und $0 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Entscheiden Sie, ob V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum bezüglich dieser Skalarmultiplikation ist.

Aufgabe 2. (V) Im Folgenden sind jeweils ein Vektorraum V über einem Körper K und Teilmengen $U \subseteq V$ gegeben. Prüfen Sie, ob es sich dabei um Teilräume handelt oder nicht.

(a) $V = \mathbb{R}^2$ und

$$U := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in V \,\middle|\, xy = 0 \right\}, \quad U := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in V \,\middle|\, 2x - y = 0 \right\}, \quad U := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in V \,\middle|\, x + y \geq 0 \right\}.$$

(b) $V = M_n(K)$ und $U := \{A \in M_n(K) \mid A \text{ invertierbar}\}$.

(c) $V = M_n(K)$ und $U := \{A \in M_n(K) \mid A^{\mathrm{tr}} = A\}$.

(d) $V = \mathrm{Abb}(K, K)$ und $U := \{f \in V \mid f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in K\}$.

(e) $V = \mathrm{Abb}(K, K)$ und $U := \{f \in V \mid \exists x \in K : f(x) = 0\}$.

Aufgabe 3. (V) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Gegeben seien Teilräume $U_1, U_2 \subseteq V$. Zeigen Sie: $\quad U_1 \cup U_2$ ist ein Teilraum von $V \quad \Leftrightarrow \quad U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Aufgabe 4. (**S**, 7=3+4 Punkte) Sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$ fest.

(a) Zeigen Sie, dass $C(A) := \{B \in M_n(K) \mid A \cdot B = B \cdot A\}$ ein Teilraum von $M_n(K)$ ist.

(b) Bestimmen Sie $C(A)$ für $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(K)$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_3(K)$.

Aufgabe 5. (**S**, 13=3+3+3+4 Punkte)
Sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$ und $N(A) = \{x \in K^n \mid A \cdot x = 0_m\}$ der Lösungsraum des homogenen LGS mit Matrix A. Bestimmen Sie jeweils Basen von $N(A)$ (gemäß Satz 16.12 der Vorlesung), für die folgenden Matrizen A über den angegebenen Körpern:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{1\times 5}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 2i & -i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 4}$ (wobei wie üblich $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$).

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \\ 1 & 2i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 2}$ (die transponierte der Matrix in (b)).

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_7^{5\times 6}$.

Aufgabe 6. (Z) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Gegeben seien endlich viele Teilräume $U_1, \ldots, U_r \subseteq V$ mit $U_i \subsetneqq V$ für alle i (wobei $r \geq 1$).

(a) Zeigen Sie: Ist $|K| = \infty$, so gilt auch $U_1 \cup \ldots \cup U_r \subsetneqq V$.

(b) Geben Sie ein Beispiel mit $|K| < \infty$ an, in dem die Aussage in (a) nicht gilt, d.h., es ist weiterhin $U_i \subsetneqq V$ für alle i, aber $U_1 \cup \ldots \cup U_r = V$.

Hinweis: Wenn Sie Hilfe brauchen, so suchen Sie im internet unter dem Stichwort “union of finite subspaces” (oder ähnlich).

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche Aufgaben.*
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *In den Übungsgruppen Dienstag/Mittwoch 24./25. Januar, oder online.*