11. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

WiSe 2022/23

Aufgabe 1. (V) Sei K Körper und $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(K)$ beliebig.

(a) Wir definieren das Polynom $f := X^2 - pX + q \in K[X]$, wobei $p := a + d$ und $q := ad - bc$. Berechnen Sie die Matrix $f(A) \in M_2(K)$.

(b) Zeigen Sie: $\mu_A = \begin{cases} X - a & \text{falls } a = d \text{ und } b = c = 0, \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$

(c) Zeigen Sie: Genau dann ist A invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt. Bestimmen Sie in diesem Fall die Einträge von A^{-1}. (Hinweis: Übungsblatt 10, Aufgabe 4.)

Aufgabe 2. (V) Gegeben seien die folgenden Polynome $f, g \in K[X]$. Teilen Sie jeweils f mit Rest durch g.

(a) $K = \mathbb{Q}$, $\quad f = 4X^4 - 6X^3 + 2X^2 - 11X + 12$, $\quad g = 2X^3 - 3X^2 + 6X - 9$.

(b) $K = \mathbb{F}_3$, $\quad f = X^6 + \bar{2}X + \bar{1}$, $\quad g = \bar{2}X^4 + \bar{2}X^3 + \bar{2}X^2 + X + \bar{2}$.

Aufgabe 3. (V) Bestimmen Sie alle normierten irreduziblen Polynome $f \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $\mathrm{Grad}(f) \leq 3$.

(Hinweis: Wie in der Vorlesung bemerkt, ist ein Polynom vom Grad 2 oder 3 genau dann irreduzibel, wenn es keine Nullstelle hat.)

Aufgabe 4. (**S**, 8=4+4 Punkte)
Sei p eine Primzahl und $K = \mathbb{F}_p$. Sei $f \in \mathbb{F}_p[X]$ normiert mit $\mathrm{Grad}(f) = 2$, also $f = X^2 + aX + b \in \mathbb{F}_p[X]$ mit $a, b \in \mathbb{F}_p$. Man sieht, dass es genau p^2 solche Polynome gibt.

(a) Zeigen Sie, dass es genau $\frac{1}{2}p(p-1)$ normierte irreduzible Polynome in $\mathbb{F}_p[X]$ vom Grad 2 gibt.

(b) Sei $p = 3$. Bestimmen Sie alle normierten irreduziblen Polynome $f \in \mathbb{F}_3[X]$ mit $\mathrm{Grad}(f) \leq 3$.

Aufgabe 5. (**S**, 12=6+6 Punkte)
(a) Sei $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$, mit $\mu_A = X^2 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ (siehe Beispiel 14.6(a) der Vorlesung). Bestimmen Sie die allgemeine Form der Matrizen in $K := \mathbb{Q}[A] \subseteq M_2(\mathbb{Q})$ (analog zu Beispiel 15.6

der Vorlesung). Zeigen Sie, dass K ein Körper ist, in dem die Gleichung $x^2 = 5$ eine Lösung hat; geben Sie explizit eine Lösung an, also eine Matrix $B \in K$ mit $B^2 = 5I_2$.

(b) Sei $K \subseteq M_2(\mathbb{F}_2)$ Körper mit 4 Elementen, wie in Beispiel 15.10(a) der Vorlesung. (Die Elemente von K sind also 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$.) Sei

$$A := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in M_2(K).$$

Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und bestimmen Sie A^{-1}.

[Hinweis: Wenn es ungewohnt ist, Matrizen mit Matrizen als Einträgen zu betrachten, so setzen Sie $\alpha := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dann sind die Elemente von K gegeben durch $K = \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha\}$, wobei 0 für die Nullmatrix und 1 für die Einheitsmatrix steht; und es gilt die Gleichung $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Obige Matrix schreibt sich damit als $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \in M_2(K)$.]

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche Aufgaben.*

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *In den Übungsgruppen Dienstag/Mittwoch 17./18. Januar, oder online.*