10. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

WiSe 2022/23

Aufgabe 1. (V) Sei K ein Körper und $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K)$ eine obere Dreiecksmatrix (siehe Blatt 8, Aufgabe 5).

(a) Es gelte $a_{ii} \neq 0$ für alle i. Sei $b \in K^n$ beliebig und betrachten Sie das LGS mit erweiterter Matrix $[\,A\,|\,b\,] \in K^{n\times(n+1)}$. Sei $[\,A\,|\,b\,] \to [\,A'\,|\,b'\,]$ (Gauß–Verfahren), wobei $[\,A'\,|\,b'\,] \in K^{n\times(n+1)}$ Stufenform hat. Wie sieht diese Stufenform aus? Wieviele freie Variablen gibt es? Schließen Sie, dass das LGS mit erweiterter Matrix $[\,A\,|\,b\,]$ eine eindeutige Lösung hat.

(b) Sei $a_{ii} \neq 0$ für alle i. Zeigen Sie, dass A invertierbar und A^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

(c) Zeigen Sie: Gibt es ein i mit $a_{ii} = 0$, so ist A nicht invertierbar.

[*Hinweis zu (c)*: Sei $m := \max\{i \mid a_{ii} = 0\}$. Ist $m = n$, so ist die letzte Zeile von A die Null-Zeile, also A nicht invertierbar. Sei nun $m < n$. Addieren Sie dann, nacheinander, passende Vielfache der Zeilen $m+1, m+2, \ldots, n$ zur m-ten Zeile, so dass diese Zeile nach diesen Operationen wie folgt aussieht: $[\,0\;\ldots\;0\;a_{mm}\;0\;\ldots\;0\,]$; wegen $a_{mm} = 0$ ist dies also wiederum die Null-Zeile.]

Aufgabe 2. (V) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq 2n} \in M_{2n}(\mathbb{Q})$ gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i+j \text{ gerade,} \\ 1 & \text{falls } i+j \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie A explizit hin für $n = 1, 2, 3$.

(b) Berechnen Sie A^2 und A^3. Behandeln Sie zuerst die Fälle $n = 1, 2, 3$.

(c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_A \in \mathbb{Q}[X]$ von A, sowie die Eigenwerte von A.

Aufgabe 3. (**S**, 12=6+6 Punkte)

(a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$.

Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_A \in \mathbb{Q}[X]$, die Eigenwerte von A, sowie jeweils alle zugehörigen Eigenvektoren.

(b) Analog zu (a), aber nun für die Matrix $A = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{F}_5)$.

Aufgabe 4. (**S**, 4 Punkte) Sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$. Sei $\mu_A \in K[X]$ das Minimalpolynom von A; sei $\mu_A = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_1X + a_0$ mit $d \geq 1$ und $a_i \in K$.

Zeigen Sie: A ist invertierbar genau dann, wenn $a_0 \neq 0$ gilt. Geben Sie in diesem Fall eine Formel für A^{-1} an.

Aufgabe 5. (V)
(a) Sei K ein beliebiger Körper. Finden Sie zwei verschiedene Matrizen $A, B \in M_2(K)$, so dass die zugehörigen Minimalpolynome gegeben sind durch $\mu_A = X^2 = \mu_B$.

(b) Sei nun $K = \mathbb{R}$. Geben Sie unendlich viele Matrizen $A \in M_2(\mathbb{R})$ an, so dass A jeweils keine Eigenwerte (in $\mathbb{R}$) besitzt.

(c) Sei K ein beliebiger Körper. Finden Sie vier obere Dreiecksmatrizen $A_i \in M_4(K)$, so dass $\mathrm{Grad}(\mu_{A_i}) = i$ für $i = 1, 2, 3, 4$ gilt.

Aufgabe 6. (**S**, 4 Punkte) Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rationaler Zahlen rekursiv durch

$$a_0 := 2, \qquad a_1 := 7 \qquad \text{und} \qquad a_n := a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Finden Sie eine geschlossene Formel für a_n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, indem Sie ein analoges Verfahren wie in Beispiel 14.9 der Vorlesung verwenden. D.h., finden Sie zunächst zwei Folgen $(x_n)_{n\geq 0}$ und $(y_n)_{n\geq 0}$, so dass sich a_n durch die x_n und y_n ausdrücken lässt.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind *zusätzliche Aufgaben.*
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *In den Übungsgruppen Dienstag/Mittwoch 10./11. Januar, oder online.*