1. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2022/23

*Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum* Votieren *bzw. zum* Vorrechnen *in den Gruppenübungen. Die mit (Z) markierten Aufgaben sind* zusätzliche Aufgaben.

Aufgabe 1. (V) Ein Mann ist in einem Keller gefangen. Nach einer kurzen Suche findet er drei Türen. Hinter einer der Türen ist ein Weg in die Freiheit. Hinter den anderen zwei Türen ist jedoch ein böser Feuer speiender Drache. An jeder Tür hängt ein Zettel mit einem Hinweis auf ihren Inhalt. Mindestens einer der drei Hinweise ist wahr und mindestens einer von ihnen ist falsch. Die Hinweise lauten:

Tür 1: Diese Tür führt in die Freiheit.
Tür 2: Es befindet sich ein Drache hinter dieser Tür.
Tür 3: Es befindet sich ein Drache hinter der Tür 2.

Welche Tür sollte der Mann öffnen, um frei zu kommen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2. (V) Anna, Britta und Carlo sind drei Studierende, die eine Mathematikprüfung geschrieben haben. Gegeben seien die drei folgenden Aussagen:

A:= Anna hat die Prüfung bestanden.
B:= Britta hat die Prüfung bestanden.
C:= Carlo hat die Prüfung bestanden.

Formalisieren Sie die folgenden Sätze:

(a) Carlo ist der einzige, der die Prüfung bestanden hat.

(b) Anna ist die einzige, die die Prüfung nicht bestanden hat.

(c) Nur einer dieser drei Studenten hat die Prüfung bestanden.

(d) Mindestens einer dieser drei Studenten hat die Prüfung bestanden.

(e) Mindestens zwei dieser drei Studenten haben die Prüfung bestanden.

(f) Höchstens zwei dieser drei Studenten haben die Prüfung bestanden.

(g) Genau zwei dieser drei Studenten haben die Prüfung bestanden.

Beispiel (a) wird formalisiert zu: $C \wedge (\neg A) \wedge (\neg B)$.

Aufgabe 3. (V) Sei X eine Menge und seien $A, B \subseteq X$. Mit $A^c := X \setminus A$ bezeichnen wir das *Komplement* von A. Beweisen Sie die *de Morgan'schen Regeln*:

(a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Hinweis: Eine Zeichnung ist hilfreich, jedoch kein ausreichender Beweis.

Aufgabe 4. (V) Seien die folgenden Mengen definiert :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{12}{x-7} \in \mathbb{Z}\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \text{ ist ein Primzahl und } |x| < 35\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 35 \quad \text{und} \quad \exists a, b \in \mathbb{Z}: \ x = a^3 - b^3\}.$$

(a) Geben Sie explizit die Elemente der obigen Mengen an.

(b) Wie viele Elemente haben die Mengen $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \cap B \cap C$?

(c) Wieviele Teilmengen hat A ? Wieviele Teilmengen mit je 11 Elementen hat A ?

(d) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(1) $1 \in A$.
(2) $1 \in B$.
(3) $\{2, 3\} \subseteq C$.
(4) $B \setminus C \neq \varnothing$.
(5) $|B \cup C| = 30$.
(6) $|(A \setminus B) \cup (B \setminus A)| = 20$.
(7) $\emptyset \subseteq C$.
(8) $A \cap C = \{1, 8\}$.
(9) $B \cap C = \emptyset$.
(10) $A \cup C = \emptyset$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 5. (Z) Zeigen Sie:

(a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Aufgabe 6. (Z) Sei X eine Menge und seien $A, B \subseteq X$. Die *symmetrische Differenz* von A und B ist definiert durch

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zeigen Sie:

(a) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $\quad A \triangle A = \varnothing$, $\quad A \triangle \varnothing = A$.

(b) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

(c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Hinweis: Es gilt $A \setminus B = A \cap B^c$.