Blatt 3, Aufgabe 4

(a) Reflexiv: $(n,m) \sim (m,n)$, da $nm = nm$.

Symmetrisch: Sei $(n,m) \sim (n',m')$. Es ist $nm' = n'm \Rightarrow$
$n'm = nm' \Rightarrow (n',m') \sim (n,m)$.

Transitiv: Sei $(n,m) \sim (n',m') \wedge (n',m') \sim (n'',m'') \Rightarrow$
$\underbrace{\boxed{nm' = n'm}}_{1} \wedge \underbrace{\boxed{n'm'' = n''m'}}_{2}$

$1 \Rightarrow nm'm'' = n'mm'' = n'm''m \overset{2}{=} n''m'm$

Deshalb, $nm''m' = n''mm' \xrightarrow[\text{Dh } m' \neq 0]{m' \in \mathbb{N}} nm'' = n''m$

$\Rightarrow (n,m) \sim (n'',m'')$.

(b) Sei $(n,m) \in A$.

$M := \{x \in \mathbb{N} \mid m \text{ teilt } nx\} \subseteq \mathbb{N}$.

$m \in M$, da m teilt nm. Deshalb $M \neq \emptyset$.

Nach Peano's Induktionsaxiom besitzt M ein kleinstes Element; sei dieses m_0.

$m_0 \in M \Rightarrow m$ teilt $nm_0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{Z}$ mit $\boxed{nm_0 = n_0m}$ (I)

Es ist $(n_0,m_0) \in A$.

- Nach (I) gilt $(n_0,m_0) \sim (n,m) \Rightarrow (n_0,m_0) \in K((n,m),R)$
- (n_0,m_0) ist ein gekürztes Paar.

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$ und k teilt $n_0 \wedge k$ teilt m_0

$\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{Z}, m_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 = kn_1$ und $m_0 = km_1 . \Rightarrow$

$\boxed{m_0 > m_1}$ (II)

Nach (I) gilt: $n m_0 = n_0 m \Rightarrow n k m_1 = k n_1 m \xRightarrow{k \neq 0}$ 2

$n m_1 = n_1 m \Rightarrow m$ teilt $n m_1 \Rightarrow m_1 \in M \xrightarrow[\text{Element in } M]{m_0 \text{ kleinestes}}$

$\boxed{m_1 \leq m_0}$ (III)

Nach (II), (III) $\Rightarrow m_1 = m_0$. Deshalb, $m_1 = k m_1 \xRightarrow{m_1 \neq 0} k = 1$

Wiederspruch.

(c) Wir haben in (b) gezeigt, dass es für alle $(n,m) \in A$ ein gekürztes Paar (n_0, m_0) gibt mit $(n,m) \sim (n_0, m_0)$.
Wir zeigen, dass (n_0, m_0) eindeutig ist. Sei $(\tilde{n_0}, \tilde{m_0})$ gekürztes Paar mit $(n,m) \sim (\tilde{n_0}, \tilde{m_0}) \Rightarrow n \tilde{m_0} = m \tilde{n_0}$. Deshalb, m teilt $n \tilde{m_0} \Rightarrow \tilde{m_0} \in M \xrightarrow[\text{Element in } M]{m_0 \text{ kleinestes}} \boxed{\tilde{m_0} \geq m_0}$ (1)

Es ist auch $(n_0, m_0) \sim (\tilde{n_0}, \tilde{m_0})$ (R transitiv)

$\Rightarrow n_0 \tilde{m_0} = \tilde{n_0} m_0 \Rightarrow \tilde{m_0}$ teilt $\tilde{n_0} m_0$.

$\tilde{m_0}$ ist kein Teiler von $\tilde{n_0}$, da $(\tilde{n_0}, \tilde{m_0})$ ist ein gekürztes Paar. Deshalb: $\tilde{m_0}$ teilt $m_0 \Rightarrow \boxed{m_0 \geq \tilde{m_0}}$ (2)

Nach (1), (2) $\Rightarrow m_0 = \tilde{m_0}$

Es ist $n_0 \tilde{m_0} = \tilde{n_0} m_0 = \tilde{n_0} \tilde{m_0} \xRightarrow{\tilde{m_0} \neq 0} n_0 = \tilde{n_0}$.

Deshalb: $\forall (n,m) \in A$ gibt es genau ein gekürztes Paar (n_0, m_0) mit $(n,m) \sim (n_0, m_0) \Rightarrow B$ ist ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen.

Blatt 3 Aufgabe 7

Seien $a,b \in \mathbb{Z}$ beliebig mit $a^6 - b^5 = 16$.

Fall 1: a ist gerade $\Rightarrow \exists m_1 \in \mathbb{Z}$ mit $\boxed{a = 2m_1}$ Es gilt:

$b^5 = a^6 - 16 = 2^6 m_1^6 - 2\cdot 8 = 2(\underbrace{2^5 m_1^6 - 8}_{\in \mathbb{Z}}) \Rightarrow 2$ teilt b^5

2 ist eine Primzahl. Deshalb 2 teilt b. $\Rightarrow \exists\, m_2 \in \mathbb{Z}$ mit

$\boxed{b = 2m_2}$. Es ist: $16 = a^6 - b^5 = (2m_1)^6 - (2m_2)^5 = 2^5(\underbrace{2m_1^6 - m_2^6}_{\in \mathbb{Z}})$

Deshalb 2^5 teilt 16. Wiederspruch.

Fall 2: a ist ungerade

$a^6 - b^5 = 16 \Rightarrow b^5 = a^6 - 16 = (a^3)^2 - 4^2 = (a^3-4)(a^3+4)$.

Sei $a^3 \pm 4$ gerade $\Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{Z}$ mit $a^3 \pm 4 = 2l \Rightarrow$

$a^3 = 2l \mp 4 = 2(\underbrace{l \mp 2}_{\in \mathbb{Z}}) \Rightarrow 2$ teilt $a^3 \xrightarrow{\text{2 Primzahl}} 2$ teilt a

$\Rightarrow a$ gerade. Widerspruch.

Deshalb $a^3 \pm 4$ ungerade.

Sei $d = ggT(a^3-4, a^3+4)$. d teilt $a^3-4 \wedge d$ teilt a^3+4

$\Rightarrow d$ teilt $a^3+4-(a^3-4) = 8 \Rightarrow d \in \{1,2,4,8\}$.

Fall 2a: $d \in \{2,4,8\}$. $\Rightarrow 2$ teilt $d \Rightarrow 2$ teilt $a^3 \pm 4 \Rightarrow$

$a^3 \pm 4$ gerade. Widerspruch.

Fall 2b: $\boxed{d = 1}$ (I)

Fall 26.1: $b = \pm 1$

$b^5 = (a^3-4)(a^3+4) \Rightarrow (\pm 1)^5 = (a^3-4)(a^3+4) \Rightarrow \pm 1 = (a^3-4)(a^3+4)$

$\Rightarrow a^3 - 4 = 1 \lor a^3 - 4 = -1 \Rightarrow a^3 = 5 \lor a^3 = -5 \Rightarrow a \notin \mathbb{Z}$

Widerspruch.

Fall 26.2: $b \neq \pm 1$

$b = \pm p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$ mit $k_i \in \mathbb{N}$, p_i Primzahlen mit $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$.

$b^5 = \pm p_1^{5k_1} p_2^{5k_2} \cdots p_n^{5k_n} = (a^3-4)(a^3+4)$.

Sei p_i ein Teiler von a^3-4. $\xRightarrow[d=1]{(I)}$ p_i ist kein Teiler von a^3+4.

Deshalb: $a^3 - 4 = \pm p_{i_1}^{5k_{i_1}} \cdots p_{i_l}^{5k_{i_l}}$ mit $p_{i_m} \neq p_{j_{m'}}$

$a^3 + 4 = \pm p_{j_1}^{5k_{j_1}} \cdots p_{j_l}^{5k_{j_l}}$

$\Rightarrow a^3 + 4 = x^5$ und $a^3 - 4 = y^5$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ und $ggT(x,y) = 1$.

Es ist $x^5 - y^5 = a^3 + 4 - a^3 + 4 = 8$, aber $A = \{x^5 - y^5 \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -32, -1, 0, 1, 32, \ldots\}$ und $8 \notin A$.

Blatt 4 Aufgabe 6

Sei $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ die Menge aller Primzahlen. P ist unendlich (Satz 3.4) und abzählbar ($f: \mathbb{N} \to P$, $n \mapsto p_n$ ist bijectiv).

Sei $S = \{ T \subseteq \mathbb{N}$ mit $|T| < +\infty \}$.

Sei $g: S \longrightarrow \mathbb{N}$, $g(\emptyset) = 1$, $g(\{n_1, n_2, \dots, n_k\}) = p_{n_1} p_{n_2} \cdots p_{n_k}$

(z.B. $g(\{1,3,5\}) = p_1 \cdot p_3 \cdot p_5 = 2 \cdot 5 \cdot 11 = 110$)

<u>Bemerkung</u>: Sei $T \in S$. $g(T) = 1 \Leftrightarrow T = \emptyset$

($\Leftarrow$) Klar

($\Rightarrow$) Sei $T \neq \emptyset \Rightarrow g(T) = \{n_1, \dots, n_k\} \Rightarrow g(T) = p_{n_1} \cdots p_{n_k} > 1$ Widerspruch.

<u>g ist injectiv</u>:

Seien $T_1, T_2 \in S$ mit $g(T_1) = g(T_2) = n$

<u>Fall 1</u>: $n = 1 \xrightarrow{\text{Bemerkung}} T_1 = T_2 = \emptyset$

<u>Fall 2</u>: $n \geq 2$

Seien $T_1 = \{n_1, \dots, n_k\}$ und $T_2 = \{l_1, \dots, l_m\}$

$g(T_1) = p_{n_1} \cdots p_{n_k}$ und $g(T_2) = p_{l_1} \cdots p_{l_m}$

Deshalb $n = p_{n_1} \cdots p_{n_k} = p_{l_1} \cdots p_{l_m}$

Nach Satz 3.8 gilt: $\{n_1, \dots, n_k\} = \{l_1, \dots, l_m\} \Rightarrow T_1 = T_2$

<u>g ist surjectiv</u>

Sei $n \in \mathbb{N}$. falls $n = 1 \Rightarrow g(\emptyset) = n$

falls $n \geq 2$. Nach Satz 3.4 gibt es Primzahlen $p_{n_1}, .., p_{n_k}$ mit $n = p_{n_1} \cdots p_{n_k}$. Sei $T = \{n_1, .., n_k\} \in S$.

Es ist $g(T) = n$.

Wir haben gezeigt, dass g bijectiv ist.

Deshalb, gibt es die Umkehrabbildung von g (Lemma 5.6)

$h: \mathbb{N} \longrightarrow S$, die auch bijectiv ist.

Nach Folgerung 6.6 ist S abzählbar unendlich.

Blatt 4 Aufgabe 7

Sei A endliche Menge und $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A.

Sei $a_1 = \min A$. Setze $A_1 := \{a \in A : a \sim a_1\} = K(a_1, R)$

Sei $a_2 = \min(A \setminus A_1)$. Setze $A_2 := \{a \in A : a \sim a_2\} = K(a_2, R)$

usw

$\xrightarrow{\text{Satz 4.7}}$ $A = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen (ÄK).

Sei $A = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ disjunkte Vereinigung.

Setze $R := \{(a,b) \in A \times A \mid \exists\, i \in \{1, .., m\} : a, b \in A_i\}$

- Reflexiv: Sei $a \in A = A_1 \cup \ldots \cup A_m \Rightarrow \exists\, i \in \{1, .., m\} : a \in A_i$
  $\Rightarrow (a,a) \in R$
- Symmetrisch: Seien $a, b \in A$ mit $(a,b) \in R \Rightarrow \exists\, i \in \{1, .., m\}$:
  $a, b \in A_i \Rightarrow b, a \in A_i \Rightarrow (b,a) \in R$

- Transitiv: Seien $a,b,c \in A$ mit $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$.

$\Rightarrow \exists\, i \in \{1,..,m\},\ j \in \{1,..,m\}: \ a,b \in A_i \wedge b,c \in A_j$

$b \in A_i \cap A_j = \emptyset$ falls $i \neq j \Rightarrow i = j \Rightarrow a,b,c \in A_i$

$\Rightarrow a,c \in A_i \Rightarrow (a,c) \in R$.

Deshalb: R ist eine Äquivalenzrelation und A_i sind die Äquivalenzklassen von R.

Jede Zerlegung von A in Äquivalenzklassen gibt eine Äquivalenzrelation, deshalb die Anzahl der Äquivalenzrelationen entspricht der Anzahl der Zerlegungen von A in disjunkte Teilmengen.

$m=2$: $A = \{1,2\} = \{1\} \cup \{2\} \Rightarrow$ 2 ÄR

$m=3$:
$$\left.\begin{aligned} A = \{1,2,3\} &= \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \\ &= \{1\} \cup \{2,3\} \\ &= \{2\} \cup \{1,3\} \\ &= \{3\} \cup \{1,2\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5 \text{ ÄR}$$

$m=4$: $A = \{1,2,3,4\} = \{1\} \cup \{2,3,4\} = \{2\} \cup \{1,3,4\} = \{3\} \cup \{1,2,4\} = \{4\} \cup \{1,2,3\} =$
$= \{1,2\} \cup \{3,4\} = \{1,3\} \cup \{2,4\} = \{1,4\} \cup \{2,3\} = \{1,2\} \cup \{3\} \cup \{4\} =$
$= \{1,3\} \cup \{2\} \cup \{4\} = \{1,4\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3,4\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{2,4\} =$
$= \{1\} \cup \{4\} \cup \{2,3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}, \{4\}$. $\Rightarrow$ 15 ÄR

Allgemeine Formel:

Sei $A = \{1, 2, \ldots, m\}$. Bezeichne $\{m \| k\}$ die Anzahl der Zerlegungen von A in genau k Teile.

z.B. $\{3 \| 2\} = 3$, denn $\{1,2,3\} = \{1,2\} \cup \{3\} = \{1,3\} \cup \{2\} = \{2,3\} \cup \{1\}$.

Dann gibt es genau
$\{m \| 1\} + \{m \| 2\} + \ldots + \{m \| m-1\} + \{m \| m\}$ Zerlegungen von A in disjunkte Teilmengen, und damit ebenso viele ÄR auf der Menge A. Die Zahlen $\{m \| k\}$ nennt man auch Stirlingzahlen der zweiten Art.

Blatt 7, Aufgabe 6

(i) Angenommen, $f(i,j) < M$ für alle $(i,j) \in \partial X$. Sei $(i_0, j_0) \in X$ mit $M = f(i_0, j_0)$ und so, dass i_0 maximal mit diesen Eigenschaft ist.

Nach Annahme ist $(i_0, j_0) \notin \partial X$ (da $f(i,j) < M$ für alle $(i,j) \in \partial X$). Deshalb, $(i_0, j_0) \in X^\circ$.

$f(i,j) \leq M \quad \forall (i,j) \in X$. Deshalb:

$$\left.\begin{array}{l} f(i_0+1, j_0) \leq M \\ f(i_0-1, j_0) \leq M \\ f(i_0, j_0+1) \leq M \\ f(i_0, j_0-1) \leq M \end{array}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Sei $f(i_0+1, j_0) \lneqq M$. Es ist

$$f(i_0, j_0) = \frac{f(i_0+1, j_0) + f(i_0-1, j_0) + f(i_0, j_0+1) + f(i_0, j_0-1)}{4}$$

$$\overset{(I)}{\Longrightarrow} M \leq \frac{f(i_0+1, j_0)}{4} + \frac{M+M+M}{4} < \frac{M}{4} + \frac{3M}{4}$$

$\Rightarrow M < M$ Wiederspruch. Deshalb: $f(i_0+1, j_0) = M$.

Widerspruch, da i_0 maximal mit $f(i_0, j_0) = M$

$\Rightarrow (i_0, j_0) \in \partial X$.

Ähnlich, $m := \min\{f(i,j) \mid (i,j) \in X\} \in \partial X$.

(ii) Sei $f \in V$ mit $f(i,j) = 0 \quad \forall (i,j) \in \partial X \overset{(i)}{\Longrightarrow} M = m = 0$.

Für alle $(i,j) \in X$ gilt $m \leq f(i,j) \leq M \Rightarrow 0 \leq f(i,j) \leq 0$

$\Rightarrow f(i,j) = 0$

(iii) Es gibt n^2 innere Punkte und $(*)$ liefert insgesamt n^2 Gleichungen. Man erhält also ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit n^2 Gleichungen und n^2 Unbekannten.

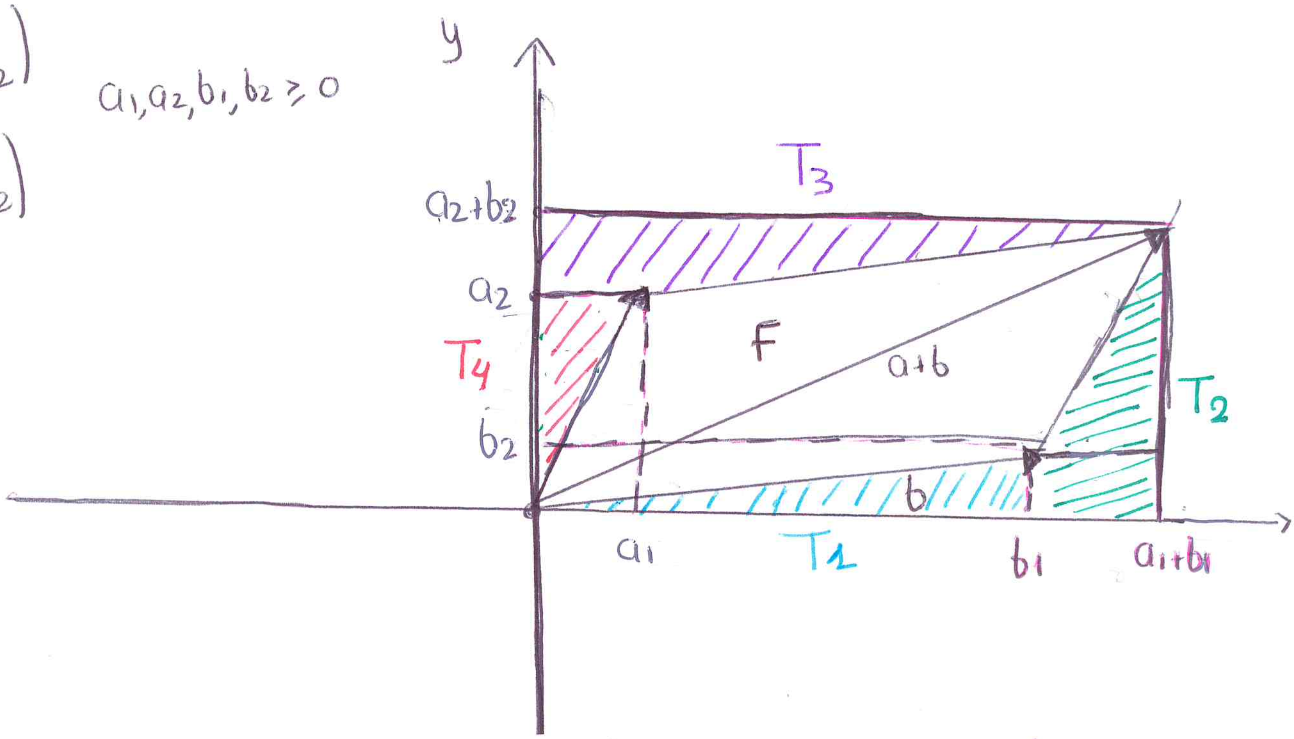
$\overset{(ii)}{\Longrightarrow}$ Das homogene Gleichungssystem hat nur die "null" Lösung $\xrightarrow[\text{Aufgabe 1(d)}]{\text{Blatt 7}}$ Das inhomogene Gleichungssystem hat genau eine Lösung $\Rightarrow$ Die Werte $x_{i,j}$ für $(i,j) \in X^0$ sind eindeutig bestimmt.

Blatt 9, Aufgabe 6

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\quad a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0$

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

(a)



$$F = \Big|(a_1+b_1)\cdot(a_2+b_2) - \underbrace{\tfrac{1}{2} b_1 b_2}_{T_1} - \underbrace{\tfrac{1}{2}(a_2+b_2+b_2)\cdot a_1}_{T_2} - \underbrace{\tfrac{1}{2}(a_1+b_1+a_1)\cdot b_2}_{T_3} - \underbrace{\tfrac{1}{2} a_1 \cdot a_2}_{T_4}\Big|$$

$$F = \Big|\cancel{a_1 a_2} + a_1 \cancel{b_2} + a_2 b_1 + \cancel{b_1 b_2} - \tfrac{1}{2}\cancel{b_1 b_2} - \tfrac{1}{2}\cancel{a_1 a_2} - \cancel{b_2} a_1 - \tfrac{1}{2} a_1 b_2 - \tfrac{1}{2}\cancel{b_1 b_2} - \tfrac{1}{2} a_1 b_2 - \tfrac{1}{2}\cancel{a_1 a_2}\Big|$$

$$F = |a_2 b_1 - a_1 b_2| = \left|- \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right|$$

(b) $u_2, u_2' = -1$, $u_1 = m$, $u_1' = m'$ $\Rightarrow \Delta = -m + m' = 0 \Leftrightarrow m = m'$

$\Leftrightarrow$ G, G' haben die gleiche Steigung $\Rightarrow$ G, G' parallel

$\Delta \neq 0 \xrightarrow[\text{Aufgabe 1}]{\text{Blatt 7}} \left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & n \\ m' & -1 & n' \end{array}\right)$ eindeutig Lösung $\Longrightarrow$

Blatt 8 Aufgabe 1) $X = \frac{\det \begin{vmatrix} n & -1 \\ n' & 1 \end{vmatrix}}{m-m'}$, $Y = \frac{\det \begin{pmatrix} m & n \\ m' & n' \end{pmatrix}}{m-m'}$.

Blatt 10, Aufgabe 6

(a) Nach Blatt 10, Aufgabe 1 (b):

$$\mathbb{P}(K^3) = \left\{ \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k_3 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \;\middle|\; k_1, k_2, k_3 \in K \right\}$$

Fall 1: $\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ k_1' \\ k_2' \end{pmatrix}} \in \mathbb{P}(K^3)$ mit $k_1 \neq k_1' \vee k_2 \neq k_2'$.

$$\left.\begin{array}{l} a + bk_1 + ck_2 = 0 \\ a + bk_1' + ck_2' = 0 \end{array}\right\} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k_1 & k_2 & 0 \\ 1 & k_1' & k_2' & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & k_1'-k_1 & k_2'-k_2 & 0 \end{array}\right)$$

- Sei $k_1' - k_1 = 0 \Rightarrow k_2' - k_2 \neq 0 \Rightarrow c = 0$.

$G = \{ \bar{v} \in X \mid v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $-k_1 x + y = 0 \}$

- Sei $k_1' - k_1 \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{k_2'-k_2}{k_1'-k_1} & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} b = \frac{k_2 - k_2'}{k_1'-k_1} c \\ a = -k_1 \frac{k_2-k_2'}{k_1'-k_1} c - k_2 c \end{array}$$

$G = \{ \bar{v} \in X \mid v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $(k_1k_2' - k_2k_1')x + (k_2 - k_2')y + (k_1'-k_1)z = 0$

<u>Fall 2</u>: $\overline{\begin{pmatrix}1\\k_1\\k_2\end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix}0\\1\\k_3\end{pmatrix}} \in \mathbb{P}(K^3)$

$$\left.\begin{array}{r} a + bk_1 + ck_2 = 0 \\ b + ck_3 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a - ck_1k_3 + ck_2 = 0 \\ b = -ck_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = (k_1k_3 - k_2)c \\ b = -ck_3 \end{array}$$

$$G = \{ \bar{v} \in X \mid v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ und } (k_1k_3 - k_2)x - k_3y + z = 0$$

<u>Fall 3</u>: $\overline{\begin{pmatrix}1\\k_1\\k_2\end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \in \mathbb{P}(K^3)$

$$\left.\begin{array}{r} a + k_1b + k_2c = 0 \\ c = 0 \end{array}\right\} \quad a = -k_1b$$

$$G = \{ \bar{v} \in X \mid v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ und } -k_1x - y = 0 \}$$

<u>Falls 4</u>: $\overline{\begin{pmatrix}0\\1\\k_3\end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix}0\\1\\k_3'\end{pmatrix}} \in \mathbb{P}(K^3)$ mit $k_3 \neq k_3'$

$$\left.\begin{array}{r} b + ck_3 = 0 \\ b + ck_3' = 0 \end{array}\right\}$$

$$G = \{ \bar{v} \in X \mid v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ und } x = 0 \}$$

<u>Falls 5</u>: $\overline{\begin{pmatrix}0\\1\\k_3\end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \in \mathbb{P}(K^3)$

$$\left.\begin{array}{r} b + ck_3 = 0 \\ c = 0 \end{array}\right\} \qquad G = \{ \bar{v} \in X \mid v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ und } x = 0 \}$$

Seien G_1, G_2 projective Geraden.

$G_1 = \{ \bar{v} \in X \mid v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $ax + by + cz = 0 \}$

$G_2 = \{ \quad — \quad \mid \quad — \quad a'x + b'y + c'z = 0 \}$

$G_1 \cap G_2 = \{ \quad — \quad \mid \quad — \quad a'x + b'y + c'z = ax + by + cz \}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{Z_2 \to a'Z_1 - aZ_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & 0 \\ 0 & a'b - ab' & a'c - ac' & 0 \end{array} \right)$$

Fall 1: $a'b - ab' = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a'c - ac' & 0 \end{array} \right)$$

Fall 1a: $a'c - ac' = 0$.

Es ist $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

Sei $a \neq 0 \Rightarrow x = -b\bar{a}'y - c\bar{a}'z \Rightarrow$

Eine Lösung: $v = \begin{pmatrix} -b\bar{a}' - c\bar{a}' \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\bar{v} \in \mathbb{P}_3(K^3)$, da $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ähnlich für $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Fall 1b: $a'c - ac' \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow z = 0 \Rightarrow ax + by = 0$$

$a \neq 0$: Eine Lösung: $\overline{\begin{pmatrix} -b\bar{a}' \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \in \mathbb{P}(K^3)$

$a = 0$: Eine Lösung $\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \in \mathbb{P}(K^3)$

Fall 2 : $a'b - ab' \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a'c-ac'}{a'b-ab'} & 0 \end{array}\right)$$

Fall 2 a : $a = 0 \Rightarrow a'b \neq 0 \Rightarrow a' \neq 0 \wedge b \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & c & 0 \\ 0 & 1 & \frac{c}{b'} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - bZ_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eine Lösung: $\overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \in \mathbb{P}(K^3)$

Falls 2 b : $a \neq 0$

Eine Lösung: $\overline{\begin{pmatrix} \frac{b\bar{a}'(ac'-a'c)}{ab'-a'b} - c\bar{a}' \\ -\frac{ac'-a'c}{a'b-ab'} \\ 1 \end{pmatrix}} \in \mathbb{P}(K^3)$

(b) $G = \{\bar{v} \in X \mid v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $ax + by + cz = 0\}$

Sei $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_p^3$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gibt $p^3 - 1$

Möglichkeiten von v.

Nach Aufgabe 1, Blatt 10 gilt: Es gibt $\frac{p^3-1}{p-1} = p^2+p+1$

Möglichkeiten von $\bar{v}$.

Jedes $\bar{v} \in G_v \overset{(a)}{\Rightarrow}$ Es gibt p^2+p+1 projektive Geraden.

Sei G eine projektive Gerade und sei $\bar{v} \in G$.

$\Rightarrow \quad ax + by + cz = 0$

Sei $a \neq 0 \Rightarrow x = -b\bar{a}^{1}y - c\bar{a}^{1}z \Rightarrow \bar{v} = \overline{\begin{pmatrix} -b\bar{a}^{1}y - c\bar{a}^{1}z \\ y \\ z \end{pmatrix}}$

Möglichkeiten von y

Es gibt $\frac{p \cdot p - 1}{p-1} = p+1$ Möglichkeiten von $\bar{v}$.

Möglichkeiten von z

Die Elementen in $\bar{v}$.

Ähnlich für $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Sei $\bar{v} \in \mathbb{P}(\mathbb{F}_p)$. Sei $\mathcal{L} = \{ G \text{ projektive Gerade, sodass } \bar{v} \in G \}$

Sei $|\mathcal{L}| =: m$

$$|\mathbb{P}(\mathbb{F}_p)| = \frac{(p+1) \cdot (p^2+p+1)}{m}$$

lineare Gerade

Punkte in einer linearen Gerade

$$\Rightarrow \quad p^2+p+1 = \frac{(p+1)(p^2+p+1)}{m}$$

$$\Rightarrow \quad m = p+1$$

Blatt 12, Aufgabe 6

Sei $f: \mathbb{N}_0 \to S$ bijektiv, $v_n = f(n) \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

$a_0 := \min \{ i \in \mathbb{N}_0 \mid v_i \neq 0_V \}$

$a_{n+1} := \min \{ i \in \mathbb{N}_0 \mid v_i \notin \langle v_0, v_1, \dots, v_{a_n} \rangle_K \}$

- a_0 existiert, da V nicht endlich erzeugt.
- $\langle v_0, v_1, \dots, v_m \rangle_K \subsetneq V$, da V nicht endlich erzeugt $\forall m \in \mathbb{N}$.

Sei B_n eine beliebige n-elementige Teilmenge von $B = \{ v_{a_n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$.
für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

B_n ist linear unabhänig

Induktionsanfang: $B_1 = \{ v_{a_1} \}$ l.u. da nur 1 Element.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit B_n l.u., $\forall B_n$.

$B_{n+1} = \{ v_{b_1}, \dots, v_{b_n}, v_{b_{n+1}} \} = \{ v_{b_1}, \dots, v_{b_n} \} \cup \{ v_{b_{n+1}} \}$

$\{ v_{b_1}, \dots, v_{b_n} \}$ ist eine n-elementige Teilmenge von $B \Rightarrow$

$\{ v_{b_1}, \dots, v_{b_n} \}$ l.u.

Nach Definition gilt $v_{b_{n+1}} \notin \langle v_0, \dots, \underset{v_{b_{n+1}-1}}{\overset{\shortparallel}{v_{b_n}}} \rangle \subseteq \{ v_{b_1}, \dots, v_{b_n} \}$

$\Rightarrow B_{n+1}$ l.u.

Blatt 13, Aufgabe 7

(1) $\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}(B) - \dim(SR(B) \cap N(A))$

Beweis

Sei $\phi: SR(B) \longrightarrow SR(AB)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- ϕ lineare Abbildung

  Sei $\lambda \in K$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \in SR(B) \Rightarrow \exists \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_k \end{pmatrix} \in K^k$ mit

  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_k \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\phi\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}\right) &= \phi\left(\lambda B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_k \end{pmatrix}\right) \\
&= A\left(\lambda B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_k \end{pmatrix}\right) \\
&= AB\left(\lambda\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_k \end{pmatrix}\right) \\
&= \lambda AB\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} + AB\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_k \end{pmatrix} \\
&= \lambda A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \\
&= \lambda \phi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \phi\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}(\phi) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in SR(B) : \phi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_k \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in SR(B) : A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_k \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in SR(B) : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in N(A) \right\} = SR(B) \cap N(A)
\end{aligned}$$

- Sei $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \in SR(AB) \Rightarrow \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ mit $AB\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$. 18

$$\Rightarrow \phi\left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Bild}(\phi) = SR(AB).$$

$$\dim SR(B) = \dim \text{Kern}(\phi) + \dim \text{Bild}(\phi) \Rightarrow$$
$$\text{Rang}(B) = \dim(SR(B) \cap N(A)) + \dim SR(AB) \Rightarrow$$
$$\text{Rang}(B) = \dim(SR(B) \cap N(A)) + \text{Rang}(AB) \Rightarrow$$

$$\text{Rang}(AB) = \text{Rang}(B) - \dim(SR(B) \cap N(A)).$$

2. $\text{Rang}(A) = n - \dim N(A)$ (Satz 1.6 (b))

Nach 1, 2 gilt:

$$\text{Rang}(A) + \text{Rang}(B) = n - \dim N(A) + \text{Rang}(AB) + \dim(SR(B) \cap N(A))$$
$$\Rightarrow \text{Rang}(A) + \text{Rang}(B) = n + \text{Rang}(AB) + \dim(SR(B) \cap N(A)) - \dim N(A)$$

$SR(B) \cap N(A)$ ist ein Teilraum von $N(A)$. $\Rightarrow$

$$\dim(SR(B) \cap N(A)) \leq \dim N(A) \Rightarrow$$
$$\dim(SR(B) \cap N(A)) - \dim N(A) \leq 0$$

Deshalb: $\text{Rang}(A) + \text{Rang}(B) \leq n + \text{Rang}(AB)$.