Aufgabe 1

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

(b) Es ist $A^4 = I_3 \implies A \cdot A^3 = I_3$

K ist Körper. Deshalb, nach Bemerkung 1.9, ist

A invertierbar mit $A^{-1} = A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $A^{2019} = A^{4 \cdot 504} \cdot A^3 = (A^4)^{504} \cdot A^3 = I_3^{504} \cdot A^3 = I_3 A^3 = A^3$

Deshalb, $A^{2019} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Sei $\mu_A = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$, $a_{n-1}, \dots, a_0 \in K$

<u>Falls 1</u>: $n = 1$

$\mu_A = X + a_0$

Es ist $\mu_A(A) = O_3 \implies A + a_0 I_3 = O_3 \implies$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & a_0 & 1 \\ -1 & -1 & a_0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = 0 \text{ Wiederspruch.}$$

$\Rightarrow n \neq 1.$

Falls 2: $n = 2$

$\mu_A = X^2 + a_1 X + a_0$

Es ist $\mu_A(A) = O_3 \Rightarrow A^2 + a_1 A + a_0 I_3 = O_3 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \boxed{1} \\ -1 & -1+a_0 & -1+a_1 \\ 1-a_1 & -a_1 & -a_1+a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = 0 \text{ Widerspruch}$$

$\Rightarrow n \neq 2$

Falls 3: $n = 3$

$\mu_A = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$

Es ist $\mu_A(A) = O_3 \Rightarrow A^3 + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_3 = O_3 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_0-1 & a_1-1 & a_2-1 \\ 1-a_2 & a_0-a_2 & a_1-a_2 \\ a_2-a_1 & 1-a_1 & a_0-a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_0-1=0 \\ a_1-1=0 \\ a_2-1=0 \\ 1-a_2=0 \\ a_0-a_2=0 \\ a_1-a_2=0 \\ a_2-a_1=0 \\ 1-a_1=0 \\ a_0-a_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_0=1 \\ a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_0=a_2 \\ a_1=a_2 \\ a_2=a_1 \\ a_0=a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow L=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \mu_A = x^3+x^2+x+1$$

Aufgabe 2

(a)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3+Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \to -1 \cdot Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3-2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

4

$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 + Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $M = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Induktionsanfang: Wir zeigen, dass $M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ für $n = 0$. Es ist $M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$.

Induktionsschritt: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $M^m = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix}$ bereits bewiesen. Wir zeigen, dass $M^{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{m+1} \end{pmatrix}$ gilt.

$$M^{m+1} = M^m \cdot M \overset{\text{Induktionsschritt}}{=} \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{m+1} \end{pmatrix},$$

Deshalb, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

(c) <u>Induktionsanfang</u>: $M^0 = I_3 = B^{-1} \cdot B = B^{-1} \cdot I_3 \cdot B = B^{-1} \cdot A^0 \cdot B$. (5)

<u>Induktionsschritt</u>: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $M^m = B^{-1} A^m B$ bereits bewiesen. Wir zeigen, dass $M^{m+1} = B^{-1} A^{m+1} B$ auch gilt.

$$B^{-1} A^{m+1} B = B^{-1} A^m \cdot A \cdot B = B^{-1} A^m B \cdot \underbrace{B^{-1} \cdot A \cdot B}_{M} \overset{\text{Induktionsschritt}}{=} M^m \cdot M$$

$$\Rightarrow B^{-1} A^{m+1} B = M^{m+1}.$$

(d) Es ist $M^n = B^{-1} A^n B \Rightarrow B M^n = \underbrace{B B^{-1}}_{I_3} A^n B \Rightarrow B M^n = A^n B \Rightarrow$

$$B M^n B^{-1} = A^n \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I_3} \Rightarrow \boxed{A^n = B M^n B^{-1}}$$

Deshalb: $A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & 2^n-1 & 2^n-1 \\ n & n+1 & n \\ 2-n-2^{n+1} & 1-n-2^n & 2-n-2^n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ -1 & 2 & -4 & b \\ 2 & -1 & 2 & c \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 & a+b \\ 0 & 1 & -2 & c-2a \end{array}\right)$

$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & c-3a-b \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2a+b \\ 0 & 1 & -2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & c-3a-b \end{array}\right)$

(GS) ist lösbar $\Leftrightarrow$ $c-3a-b=0$ $\Leftrightarrow$ $c=3a+b$

(b) $x=2a+b$ und $y-2z=a+b \Rightarrow y=a+b+2z$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+b+2z \\ z \end{pmatrix}$$

Deshalb: $L = \left\{ \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+b+2k \\ k \end{pmatrix}, \ k \in \mathbb{R} \right\}$

(c)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ m & 1-m & 2(m-1) & b \\ 2 & m & -(3m+1) & c \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - mZ_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-ma \\ 0 & m+2 & -3m-5 & c-2a \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - (m+2)Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-ma \\ 0 & 0 & -m-1 & c-2a-bm+m^2a-2b+2ma \end{array}\right) \xrightarrow[m \neq -1]{Z_3 \to \frac{1}{-(m+1)} Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -2 & b-ma \\ 0 & 0 & 1 & \frac{am^2+(2a-b)m+c-2a-2b}{-(m+1)} \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b+(1-m)a \\ 0 & 1 & -2 & b-ma \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{am^2+(2a-b)m+c-2a-2b}{m+1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 + 2Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b+(1-m)a \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{3am^2+(5a-3b)m-4a-5b+2c}{m+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{am^2+(2a-b)m+c-2a-2b}{m+1} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} b+(1-m)a \\ -\dfrac{3am^2+(5a-3b)m-4a-5b+2c}{m+1} \\ -\dfrac{am^2+(2a-b)m+c-2a-2b}{m+1} \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Nach Aufgabe 1 ((b) $\Leftrightarrow$ (e)), Blatt 7 gilt:

M invertierbar $\Leftrightarrow$ (GS) hat eine eindeutige Lösung.

Falls 1: $m = -1 \overset{(a)}{\Longrightarrow}$ (GS) keine Lösung (wenn $c \neq 3a+b$)

$\vee$

(GS) unendliche viele Lösungen (wenn $c = 3a+b$)

$\Rightarrow$ M nicht invertierbar

Falls 2: $m \neq -1 \overset{(c)}{\Longrightarrow}$ (GS) eine eindeutige Lösung $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ M invertierbar.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ m & 1-m & 2(m-1) & 0 & 1 & 0 \\ 2 & m & -(3m+1) & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - mZ_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -m & 1 & 0 \\ 0 & m+2 & -3m-5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - (m+2)Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -m-1 & m^2+2m-2 & -m-2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[m \neq -1]{Z_3 \to -\frac{1}{m+1} Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{m^2+2m-2}{m+1} & \frac{m+2}{m+1} & \frac{1}{m+1} \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1-m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{m^2+2m-2}{m+1} & \frac{m+2}{m+1} & -\frac{1}{m+1} \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 + 2Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{\begin{pmatrix} 1-m & 1 & 0 \\ -\frac{3m^2+5m-4}{m+1} & \frac{3m+5}{m+1} & -\frac{2}{m+1} \\ -\frac{m^2+2m-2}{m+1} & \frac{m+2}{m+1} & -\frac{1}{m+1} \end{pmatrix}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) \longrightarrow M^{-1}$$

Aufgabe 4

Sei $u \in U_1 \Rightarrow \exists\, a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $\boxed{u = a u_1 + b u_2 + c u_3}$ (1)

Wir zeigen, dass $u_1, u_2, u_3 \in U_2$.

- $u_1 \in U_2 \iff \exists\, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ mit $u_1 = a_1 u_4 + b_1 u_5 + c_1 u_6$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -a_1 + 2b_1 - c_1 &= 1 \\ -2a_1 + b_1 + c_1 &= -4 \\ a_1 - 3b_1 + c_1 &= -2 \\ 2a_1 + b_1 + 3c_1 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1 \\ Z_4 \to Z_2 + Z_4 \\ Z_3 \to Z_3 + Z_1}]{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to \frac{Z_4}{2}]{Z_2 \to -\frac{Z_2}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_2]{Z_2 \to Z_2 + Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to \frac{Z_4}{3}]{Z_2 \leftrightarrow Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - 2Z_2]{Z_4 \to Z_3 + Z_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{Z_2 \to -Z_2 \\ Z_3 \to -Z_3}]{Z_1 \to Z_1 + Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & +2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u_1 = 2u_4 + u_5 - u_6$$

Ähnlich: $u_2 = u_4 - u_5 + u_6$ und $u_3 = 3u_4 + 3u_5 - 3u_6$.

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} u = au_1 + bu_2 + cu_3 = a(2u_4 + u_5 - u_6) + b(u_4 - u_5 + u_6) + c(3u_4 + 3u_5 - 3u_6)$$

$$= (2a + b + 3c)u_4 + (a - b + 3c)u_5 + (-a + b - 3c)u_6$$

$\Rightarrow u \in U_2$.

(b) Wir zeigen, dass $U_2 \subsetneq U_1$ (und, nach (a) folgt $U_2 \neq U_1$).

Sei $u \in U_1 \overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\boxed{u = \begin{pmatrix} a - 4b + 6c \\ -4a - 2b - 6c \\ -2a + 5b - 9c \\ 2a + 4b \end{pmatrix}}$ (2)

Wir zeigen, dass $U_2 \ni u_4 \notin U_1$.

Sei $u_4 \in U_1$. Nach (2) gibt es $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 4b + 6c \\ -4a - 2b - 6c \\ -2a + 5b - 9c \\ 2a + 4b \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a - 4b + 6c = -1 \\ -4a - 2b - 6c = -2 \\ -2a + 5b - 9c = 1 \\ 2a + 4b = 2 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & -1 \\ -4 & -2 & -6 & -2 \\ -2 & 5 & -9 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to \frac{Z_4}{2}]{Z_2 \to \frac{Z_2}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & 5 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{Z_2 \to 2Z_1+Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_1}]{Z_3 \to Z_2 - Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & -1 \\ 0 & -7 & 9 & -3 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4 \to Z_3 + Z_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & -1 \\ 0 & -7 & 9 & -3 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{2} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ keine Lösung $\Rightarrow u_4 \notin U_1 \Rightarrow U_2 \subsetneq U_1 \Rightarrow U_2 \neq U_1$.

Aufgabe 5

(a) $v \in \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{F}_5} \Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{F}_5$ mit $v = au_1 + bu_2$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{1} \\ -\bar{2} \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{3}a + \bar{2}b \\ -b \\ -\bar{2}a - \bar{5}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{3}a + \bar{2}b \\ \bar{4}b \\ \bar{3}a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bar{3}a + \bar{2}b = \bar{1} \\ \bar{4}b = \bar{3} \\ \bar{3}a = k \end{array}\right\}$$

K Körper und $\bar{4} \neq \bar{0} \Rightarrow \exists\, \bar{4}^{-1} \in \mathbb{F}_5$.

$\bar{4}^{-1} = \bar{4}$, da $\bar{4} \cdot \bar{4} = \overline{16} = \bar{1}$.

Deshalb, $\bar{4}b = \bar{3} \Rightarrow b = \bar{4}^{-1} \cdot \bar{3} = \bar{4} \cdot \bar{3} = \overline{12} = \bar{2}$

$\Rightarrow \boxed{b = \bar{2}}$

$\bar{3}a + \bar{2}b = \bar{1} \Rightarrow \bar{3}a + \bar{4} = \bar{1} \Rightarrow \bar{3}a = -\bar{3}$

$\bar{3} \neq \bar{0} \Rightarrow a = -\bar{3} \cdot \bar{3}^{-1} = -\bar{1} = \bar{4} \Rightarrow \boxed{a = \bar{4}}$

Deshalb, $k = \bar{3} \cdot \bar{4} = \overline{12} = \bar{2}$

(b) $\mu_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

$$A = \begin{pmatrix} \bar 1 & \bar 3 & \bar 2 \\ \bar 3 & \bar 0 & \bar 4 \\ \bar 2 & \bar 3 & \bar 0 \end{pmatrix}$$

<u>Falls 1:</u> $n = 1$

$\mu_A = X + a_0$. Es ist $\mu_A(A) = O_3 \Rightarrow A + a_0 I_3 = O_3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar 1 & \bar 3 & \bar 2 \\ \bar 3 & \bar 0 & \bar 4 \\ \bar 2 & \bar 3 & \bar 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & a_0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 + \bar 1 & \bar 3 & \boxed{\bar 2} \\ \bar 3 & a_0 & \bar 4 \\ \bar 2 & \bar 3 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar 0 & \bar 0 & \boxed{\bar 0} \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar 2 = \bar 0$$ Widerspruch

<u>Falls 2:</u> $n = 2$

$\mu_A = X^2 + a_1 X + a_0$. Es ist $\mu_A(A) = O_3 \Rightarrow A^2 + a_1 A + a_0 I_3 = O_3$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \overline{14} & \bar 9 & \overline{14} \\ \overline{11} & \overline{21} & \bar 6 \\ \overline{11} & \bar 6 & \overline{16} \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} \bar 1 & \bar 3 & \bar 2 \\ \bar 3 & \bar 0 & \bar 4 \\ \bar 2 & \bar 3 & \bar 0 \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} \bar 1 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 1 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar 4 + a_1 + a_0 & \boxed{\bar 4 + \bar 3 a_1} & \bar 4 + \bar 2 a_1 \\ \bar 1 + \bar 3 a_1 & \bar 1 + a_0 & \bar 1 + \bar 4 a_1 \\ \bar 1 + \bar 2 a_1 & \boxed{\bar 1 + \bar 3 a_1} & \bar 1 + a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \\ \bar 0 & \bar 0 & \bar 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \bar 3 a_1 + \bar 4 = \bar 0 \Rightarrow \bar 3 a_1 = -\bar 4 \Rightarrow \bar 3 a_1 = \bar 1 \Rightarrow a_1 = \bar 3^{-1}$

$\bar 3 a_1 + \bar 1 = 0 \Rightarrow \bar 3 a_1 = -\bar 1 \Rightarrow \bar 3 a_1 = \bar 4 \Rightarrow a_1 = \bar 4 \cdot \bar 3^{-1}$

$\overline{3}^{-1} = \overline{2}$, da $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{6} = \overline{1}$.

Deshalb, $a_1 = \overline{2} \wedge a_1 = \overline{8} = \overline{3}$ Widerspruch.

<u>Falls 3:</u> $n = 3$

$\mu_A = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$

$\mu_A(A) = A^3 + a_2 A^2 + a_1 A + a_2 I_3 = O_3 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{4} & \overline{4} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{4} & \overline{4} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{3} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{0} & \overline{4} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{0} \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{4} + \overline{4}a_2 + a_1 + a_0 = \overline{0} \\
&\overline{4} + \overline{4}a_2 + \overline{3}a_1 = \overline{0} \\
&\overline{4} + \overline{4}a_2 + \overline{2}a_1 = \overline{0} \\
&\overline{1} + a_2 + \overline{3}a_1 = 0 \\
&\overline{1} + a_2 + a_0 = 0 \\
&\overline{1} + a_2 + \overline{4}a_1 = \overline{0} \\
&\overline{1} + a_2 + \overline{2}a_1 = 0 \\
&\overline{1} + a_2 + \overline{3}a_1 = 0 \\
&\overline{1} + a_2 + a_0 = \overline{0}
\end{aligned}\right\} \ \ldots \Rightarrow \begin{aligned} a_0 &= \overline{0} \\ a_1 &= \overline{0} \\ a_2 &= \overline{4} \end{aligned}$$

Deshalb $\mu_A(x) = X^3 + \overline{4}X^2$

Aufgabe 6

(a) $(0,0,0) \notin V$, da $0+0\cdot 0 \neq 1 \Rightarrow U$ ist kein Teilraum

(b) $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ mit $a_{ij} = 0$ für $1 \le j < i \le n$.

* $0_n \in U$
* Sei $A \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda A = (\tilde{a}_{ij})$ mit $\tilde{a}_{ij} = \lambda a_{ij}$.
  Deshalb, $\tilde{a}_{ij} = 0$ für $1 \le j < i \le n \Rightarrow \lambda A \in U$.
* Seien $A, B \in U$. $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ mit
  $a_{ij} = b_{ij} = 0$ für $1 \le j < i \le n$. Sei
  $A + B = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
  Deshalb, $c_{ij} = 0$ für $1 \le j < i \le n \Rightarrow A+B \in U$.

Deshalb: U ist ein Teilraum.

Diese Aufgabe (Aufgabe 6(c)) ist leider falsch. V ist kein R-Vektorraum.

(c)
* $(0,0) \in U$ da $0 \equiv 0 \mod 5$
* Sei $(x,y) \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es ist $x \equiv y \mod 5 \Rightarrow 5 \mid x - y \Rightarrow$
  $\Rightarrow 5 \mid \lambda(x-y) \Rightarrow 5 \mid \lambda x - \lambda y \Rightarrow \lambda x \equiv \lambda y \mod 5 \Rightarrow$
  $\lambda(x,y) \in U$.
* Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in U$
  $\Rightarrow x_1 \equiv y_1 \mod 5 \wedge x_2 \equiv y_2 \mod 5$
  $\Rightarrow 5 \mid x_1 - y_1 \wedge 5 \mid x_2 - y_2$
  $\Rightarrow 5 \mid x_1 - y_1 + x_2 - y_2 \Rightarrow 5 \mid (x_1+x_2) - (y_1+y_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 \equiv y_1 + y_2 \mod 5$

$\Rightarrow \quad (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in U.$

Deshalb: U ist ein Teilraum.

Aufgabe 7

(a) R_1

- Sei $n \in \mathbb{Z}$. $(n,n) \in R_1$, da $n \leq n$.
- Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $(n,m) \in R_1 \wedge (m,n) \in R_1 \Rightarrow$
  $(n \leq m) \wedge (m \leq n) \Rightarrow n = m$
- Seien $n, m, k \in \mathbb{Z}$ mit $(n,m) \in R_1 \wedge (m,k) \in R_1 \Rightarrow$
  $(n \leq m) \wedge (m \leq k) \Rightarrow n \leq k \Rightarrow (n,k) \in R_1$

$\Rightarrow R_1$ ist eine Ordnungsrelation.

R_2

Es ist $(3,-3) \in R_2 \wedge (-3,3) \in R_2$, da $3 \mid -3$ und $-3 \mid 3$. Aber $3 \neq -3 \Rightarrow R_2$ ist nicht antisymmetrisch $\Rightarrow R_2$ ist keine Ordnungsrelation.

$\underline{R_3}$

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Es ist $(n,n) \in R_3$, da $n \mid n$.
- Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $(n,m) \in R_3 \land (m,n) \in R_3$.

$\Rightarrow (n \mid m) \land (m \mid n) \Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{N}$ mit $(m = an) \land (n = bm)$

$\Rightarrow m = an = abm \Rightarrow \boxed{(1-ab)m = 0}$

$m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \neq 0$. Deshalb $1 = ab \xRightarrow{a,b \in \mathbb{N}} a = b = 1$

$\Rightarrow m = n$

- Seien $n, m, k \in \mathbb{N}$ mit $(n,m) \in R_3 \land (m,k) \in R_3$

$\Rightarrow (n \mid m) \land (m \mid k) \Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{N}$ mit

$(m = an) \land (k = bm)$

$\Rightarrow k = bm = ban \Rightarrow n \mid k \Rightarrow (n,k) \in R_3$.

Deshalb: R_3 ist eine Ordnungsrelation.

$\underline{R_4}$

- Sei $B \in P(A)$. $(B,B) \in R_4$ da $B \subseteq B$.
- Seien $B, C \in P(A)$ mit $(B,C) \in R_4 \land (C,B) \in R_4$

$\Rightarrow (B \subseteq C) \land (C \subseteq B) \Rightarrow C = B$.

- Seien $B, C, D \in P(A)$ mit $(B,C) \in R_4 \land (C,D) \in R_4$

$\Rightarrow (B \subseteq C) \land (C \subseteq D) \Rightarrow B \subseteq D \Rightarrow (B,D) \in R_4$

Deshalb: R_4 ist eine Ordnungsrelation.

Sei R eine Äquivalenzrelation. R ist symmetrisch $\Rightarrow$
$\forall (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$.
Deshalb ist R eine Ordnungsrelation wenn $a=b$.
$\Rightarrow R = \{(a,a) \mid a \in A\}$

(b) R_1 ist eine totale Ordnung: seien $n,m \in \mathbb{Z}$. Es ist

$$(n=m) \vee (n<m) \vee (n>m) \Leftrightarrow$$
$$(n \leq m) \vee (m \leq n) \Leftrightarrow$$
$$(n,m) \in R_1 \vee (m,n) \in R_1$$

R_2 ist keine Ordnungsrelation $\Rightarrow$ R ist keine totale Ordnung.

R_3 ist keine totale Ordnung: Seien $3,4 \in \mathbb{N}$.
$(3,4) \notin R_3$ (da $3 \nmid 4$) und $(4,3) \notin R_3$ (da $4 \nmid 3$).

R_4 ist keine totale Ordnung: Sei $A = \{1,2,3\}$
und seien $B = \{1\}$, $C = \{2\} \in \mathcal{P}(A)$.
$B \nsubseteq C$ und $C \nsubseteq B$. $\Rightarrow (B,C) \notin R_4 \wedge (C,B) \notin R_4$.