Wiederholungs-Übungen zur Algebra zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Dieses Übungsblatt enthält einige typische Aufgaben zur Wiederholung. Die Bearbeitung und Abgabe ist freiwillig, wird aber sehr empfohlen!

Aufgabe 1. Sei K beliebiger Körper. Gegeben sei die Martix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in M_3(K)$.

(a) Zeigen Sie, dass $A^4 = I_3$.
(b) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist. Berechnen Sie A^{-1}.
(c) Berechnen Sie A^{2019}.
(d) Bestimmen Sie die Minimalgleichung $\mu_A \colon K \to K$.

Aufgabe 2. Sei $K = \mathbb{Q}$. Gegeben seien die Martizen $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass B invertierbar ist. Berechnen Sie B^{-1}.
(b) Sei $M := B^{-1}AB$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $M^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$.
(c) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $M^n = B^{-1}A^nB$.
(d) Berechnen Sie A^n (in Abhängigkeit von n), für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3. Seien $m, a, b, c \in \mathbb{R}$ fest. Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$:

$$\text{(GS)} \qquad \begin{cases} x - y + 2z & = & a \\ mx + (1-m)y + 2(m-1)z & = & b \\ 2x + my - (3m+1)z & = & c \end{cases}$$

(a) Sei $m = -1$. Zeigen Sie: (GS) hat Lösungen genau dann, wenn $c = 3a + b$.
(b) Sei $m = -1$ und $c = 3a + b$. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von a und b) die Lösungsmenge von (GS).
(c) Sei $m \neq -1$. Zeigen Sie: (GS) hat eine eindeutige Lösung. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von a, b, c und m) diese Lösung.
(d) Gegeben sei die Matrix $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & 1-m & 2(m-1) \\ 2 & m & -(3m+1) \end{bmatrix}$.
Für welche $m \in \mathbb{R}$ ist M invertierbar? Berechnen Sie für diese m die Matrix M^{-1}.

Aufgabe 4. Gegeben seien die folgenden Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sei $U_1 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ und $U_2 = \langle u_4, u_5, u_6 \rangle_{\mathbb{R}}$.

Zeigen Sie: (a) $U_1 \subseteq U_2$ und (b) $U_1 \neq U_2$.

Aufgabe 5. Sei $k \in \mathbb{F}_5$ fest. Gegeben seien die Spaltenvektoren in $\mathbb{F}_5^3$:

$$v = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ -\bar{2} \\ k \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} \bar{3} \\ \bar{0} \\ -\bar{2} \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} \bar{2} \\ -\bar{1} \\ -\bar{5} \end{bmatrix}.$$

(a) Für welche $k \in \mathbb{F}_5$ gilt $v \in \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{F}_5}$?

(b) Sei nun $k = \bar{2}$ und $A \in M_3(\mathbb{F}_5)$ die Matrix, deren Spalten durch v, u_1, u_2 gegeben sind. Bestimmen Sie die Minimalgleichung $\mu_A \colon \mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_5$.

Aufgabe 6. Im Folgenden sind jeweils ein Vektorrum V über $\mathbb{R}$ und eine Teilmenge $U \subseteq V$ gegeben. Prüfen Sie, ob es sich dabei um Teilräume handelt oder nicht.

(a) $V = \mathbb{R}^3$ und $U := \{(x, y, z) \in V \mid x + yz = 1\}$.

(b) $V = M_n(\mathbb{R})$ und $U = \{A \in V \mid A \text{ ist eine obene Dreiecksmatrix}\}$.

(c) $V = \mathbb{Z}^2$ und $U := \{(x, y) \in V \mid x \equiv y \mod 5\}$.

Aufgabe 7. Sei A eine nicht-leere Menge und $R \subseteq A \times A$ eine Relation. Dann heißt R **antisymmetrisch**, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: Aus $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ folgt $a = b$.

(a) Ist R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, so heißt R eine **Ordnungsrelation**. Welche der folgende Relationen sind Ordnungrelationen, welche nicht?

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \leq m\}, \\ R_2 &= \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \text{ teilt } m\}, \\ R_3 &= \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \text{ teilt } m\}, \\ R_4 &= \{(B, C) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid B \subseteq C\}, \end{aligned}$$

wobei A eine beliebige nicht-leere Menge in R_4 ist. Wann ist eine Äquivalenzrelation eine Ordnungsrelation?

(b) Ist R eine Ordnungsrelation, so heißt R eine **totale Ordnung**, wenn $(a, b) \in R$ oder $(b, a) \in R$ für alle $a, b \in A$ gilt. Welche der obigen Relationen sind totale Ordnungen?

Bemerkung. Eine totale Ordnung heißt **Wohlordnung**, wenn jede nicht-leere Teilmenge $B \subseteq A$ ein kleinstes Element besitzt, also ein Element $b_0 \in B$ mit $(b_0, b) \in R$ für alle $b \in B$. Mit Hilfe des Auswahlaxioms kann man zeigen, dass sich jede Menge wohlordnen lässt; siehe dazu auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Wohlordnungssatz`