Scheinklausur

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

12. Februar 2019

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Blatt. Wenn Sie Aussagen und Sätze benutzen, die nicht in der Vorlesung behandelt wurden, so ist dies klar zu benennen und zu begründen. Hilfsmittel (Taschenrechner, Notizen, etc.) sind nicht erlaubt.
Die Klausur ist bestanden, wenn Sie ≥ 16 Punkte erreichen. Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (5=1+1+1+1+1 Punkte)
Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? (Begründen Sie Ihre Antworten.)

(a) $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ist ein Körper.
(b) $\bar{4} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist invertierbar in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
(c) Sei $K = \mathbb{R}$. Dann ist $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2 \right\}$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^2$.
(d) Sei $K = \mathbb{F}_2$. Dann ist $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_2^2 \mid x^2 = y^2 \right\}$ ein Teilraum von $\mathbb{F}_2^2$.
(e) Seien V, W Vektorräume über einem Körper K mit $\dim V = 5$ und $\dim W = 2$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ mit $\dim \mathrm{Kern}(\varphi) = 2$.

Aufgabe 2. (5=3+2 Punkte)
Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Gegeben seien die folgenden Vektoren in $V = \mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie: Ist $a \neq 1$, so ist das Tupel (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig.
(b) Sei nun $a = 1$. Zeigen Sie, dass dann das Tupel (v_1, v_2, v_3) linear abhängig ist; bestimmen Sie Koeffizienten $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0_4$ und $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Bitte wenden.

Aufgabe 3. (9=2+5+2 Punkte)
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie A^2 und prüfen Sie, ob es $x, y \in \mathbb{Q}$ gibt mit $A^2 = xI_3 + yA$.
(b) Zeigen Sie, dass A genau 2 Eigenwerte hat, nämlich 0 und -1; bestimmen Sie Basen für die zugehörigen Eigenräume.
(c) Ist A diagonalisierbar? (Begründen Sie Ihre Antwort; dies ist möglich ohne weitere Rechnungen.)

Aufgabe 4. (9=3+3+3 Punkte)
Sei $K = \mathbb{R}$ und $P_2(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2. Jedes $f \in P_2(\mathbb{R})$ ist also gegeben durch eine Formel der Form $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (mit vorgegebenen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$). Für $i \geq 0$ sei $p_i \in P_2(\mathbb{R})$ definiert durch $p_i(x) := x^i$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (wie in der Vorlesung).

Wir definieren eine Abbildung $\varphi\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi(f) := \begin{bmatrix} f(0) \\ f(2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{für alle } f \in P_2(\mathbb{R}).$$

Ist z.B. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt $f(0) = -3$, $f(2) = 5$, also $\varphi(f) = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Die so definierte Abbildung $\varphi\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ is linear. (Das brauchen Sie nicht zu beweisen.)

(a) Sei $f_1 \in P_2(\mathbb{R})$ gegeben durch $f_1(x) := x^2 - 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(\varphi) = \langle f_1 \rangle_{\mathbb{R}}$ gilt. Ist φ surjektiv? (Begründen Sie Ihre Antwort.)
(b) Zeigen Sie, dass $B := \{f_1, p_0, p_1\}$ eine Basis von $P_2(\mathbb{R})$ ist.
(c) Sei $C = \{e_1, e_2\}$ die Basis von $\mathbb{R}^2$, die aus den beiden Einheitsvektoren $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ besteht. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $A = M_C^B(\varphi)$.

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Seien $\varphi, \psi\colon V \to V$ lineare Abbildungen.

Zeigen Sie: Ist $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, so gilt $\varphi(\mathrm{Kern}(\psi)) \subseteq \mathrm{Kern}(\psi)$ und $\varphi(\mathrm{Bild}(\psi)) \subseteq \mathrm{Bild}(\psi)$.