Quiz zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

17 Dezember 2018

Version A

Beantworten Sie die Fragen und schreiben Sie die Lösung in die Kästchen, bzw. kreuzen Sie die richtige Lösung an. Die Rechenwege werden nicht abgegeben.
Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
Ein Teil der erworbenen Punkte kann als Bonus für den Scheinerwerb genutzt werden, nach der Formel Bonuspunkte $= \frac{\text{erreichte Punkte}-10}{2}$. *Negative Bonuspunkte verfallen.*
Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (7 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Seien $A,\ B \in \mathrm{GL}_n$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen immer wahr oder im Allgemeinen falsch sind.

(a) $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2$ ist — immer wahr ☒ — allgemein falsch ☐.

(b) $(I_n - A)(I_n + A^{-1}) = I_n - A^2$ ist — immer wahr ☐ — allgemein falsch ☒.

(c) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ist — immer wahr ☐ — allgemein falsch ☒.

(d) $A + B \in \mathrm{GL}_n$ ist — immer wahr ☐ — allgemein falsch ☒.

(e) $ABA^{-1}B^{-1} = I_n$ ist — immer wahr ☐ — allgemein falsch ☒.

(f) $(ABA^{-1})^3 = AB^3A^{-1}$ ist — immer wahr ☒ — allgemein falsch ☐.

(g) $A^2 + 3A = A(A + 3)$ ist — immer wahr ☐ — allgemein falsch ☒.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und seien $A \in R^{3\times 2}$, $B \in R^{4\times 3}$ und $C \in R^{2\times 3}$. Wir betrachten die folgenden Matrixprodukte. Wenn das Produkt definiert ist, geben Sie die Größe des Produkts an. Wenn das Produkt nicht definiert ist, schreiben Sie „nicht definiert“ in das Kästchen.

AB	nicht definiert	CA	2×2
CB	nicht definiert	$BACA$	4×2
BA	4×2	CAB	nicht definiert

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ x & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ invertierbar?

$x \in$ $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-\frac{6}{5}\}}$.

Aufgabe 4. (2 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{F}_2$.

$$\begin{cases} x + \overline{3}y = \overline{5} \\ \overline{3}x + \overline{2}y = \overline{7} \\ \overline{5}x + y = \overline{15} \end{cases}$$

$L =$ $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix} \right\}}$.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Sei $m \in \mathbb{R}$ fest. Bestimmen Sie m, so dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ x + my + m^2 z = m - 1 \end{cases}$$

(a) keine Lösung hat: $m \in$ $\boxed{\{2\}}$.

(b) eine eindeutige Lösung hat: $m \in$ $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}}$.

(c) unendliche viele Lösungen hat: $m \in$ $\boxed{\{1\}}$.

Quiz zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

17 Dezember 2018

Version B

Beantworten Sie die Fragen und schreiben Sie die Lösung in die Kästchen, bzw. kreuzen Sie die richtige Lösung an. Die Rechenwege werden nicht abgegeben.
Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
Ein Teil der erworbenen Punkte kann als Bonus für den Scheinerwerb genutzt werden, nach der Formel Bonuspunkte $= \frac{\text{erreichte Punkte} - 10}{2}$. *Negative Bonuspunkte verfallen.*
Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (7 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Seien $A, B \in \mathrm{GL}_n$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen immer wahr oder im Allgemeinen falsch sind.

(a) $(I_n - A)(I_n + A) = I_n + A^2$ ist — immer wahr ☐ — allgemein falsch ☒.

(b) $(I_n - A)(I_n + A^{-1}) = -A + A^{-1}$ ist — immer wahr ☒ — allgemein falsch ☐.

(c) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ist — immer wahr ☐ — allgemein falsch ☒.

(d) $A^{-1}B \in \mathrm{GL}_n$ ist — immer wahr ☒ — allgemein falsch ☐.

(e) $ABB^{-1}A^{-1} = I_n$ ist — immer wahr ☒ — allgemein falsch ☐.

(f) $(ABA^{-1})^5 = AB^5A^{-1}$ ist — immer wahr ☒ — allgemein falsch ☐.

(g) $A^3 + 2A = A(A^2 + 2)$ ist — immer wahr ☐ — allgemein falsch ☒.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und seien $A \in R^{4\times 3}$, $B \in R^{3\times 2}$ und $C \in R^{2\times 3}$. Wir betrachten die folgenden Matrixprodukte. Wenn das Produkt definiert ist, geben Sie die Größe des Produkts an. Wenn das Produkt nicht definiert ist, schreiben Sie „nicht definiert“ in das Kästchen.

AB	4×2	$ABCB$	4×2
CB	2×2	$BACA$	nicht definiert
BA	nicht definiert	CAB	nicht definiert

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ invertierbar?

$x \in$ $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}}$.

Aufgabe 4. (2 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{F}_2$.

$$\begin{cases} x + \overline{2}y = \overline{5} \\ \overline{3}x + \overline{2}y = \overline{7} \\ \overline{5}x + y = \overline{12} \end{cases}$$

$L =$ $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{pmatrix} \right\}}$.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Sei $m \in \mathbb{R}$ fest. Bestimmen Sie m, so dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ x + my + m^2 z = m - 1 \end{cases}$$

(a) eine eindeutige Lösung hat: $m \in$ $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}}$.

(b) keine Lösung hat: $m \in$ $\boxed{\{2\}}$.

(c) unendliche viele Lösungen hat: $m \in$ $\boxed{\{1\}}$.