Kapitel 1 Matrizen

§1 Definition und Operationen mit Matrizen

Sei R kommutativer Ring mit 1 (z.B. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$)

Def. 1.1 Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Ein rechteckiges Schema der Form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \updownarrow m \text{ Zeilen}$$

$$\underbrace{\longleftrightarrow}_{n \text{ Spalten}}$$

heißt $m \times n$-Matrix. Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$

heißt a_{ij} = Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

oder einfach (i,j)-Eintrag.

Schreibe auch $A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n}$.

$R^{m \times n}$:= Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in R.

<u>Formal</u>: Eine $m \times n$-Matrix ist eine Abbildung

$f: \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to R$, wobei

$a_{ij} := f(i,j)$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Beispiel 1.2 (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ist eine 2×3-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{Z}$.

(b) Ist $m = n$, so erhalten wir quadratische

Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Benutzen oft Bezeichnung $M_n(\mathbb{R})$ anstelle von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(c) Einige weitere Spezialfälle:

$m = 1$ (1 Zeile) Dann $A = [a_1 \; a_2 \cdots a_n]$ "Zeilenvektor"

Analog $n = 1$ (1 Spalte) $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ "Spaltenvektor"

$m = n = 1$ (1 Zeile, 1 Spalte) $A = [a]$ Identifizieren dies oft einfach mit $\mathbb{R}$ selbst.

<u>Konvention</u>: $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n\times 1}$ = Menge der Spaltenvektoren der Länge n

<u>Def. 1.3</u> $\mathbb{R}$, n, m wie oben. Gegeben seien
$A = [a_{ij}]_{1\le i\le m,\, 1\le j\le n}$ und $B = [b_{ij}]_{1\le i\le m,\, 1\le j\le n}$
in $\mathbb{R}^{m\times n}$. Dann definieren wir die Summe $A+B$ als die $m\times n$-Matrix mit (i,j)-Eintrag $a_{ij} + b_{ij}$ für $1\le i\le m$ und $1\le j\le n$.

Ist $c\in\mathbb{R}$ beliebig, so definieren wir cA als die $m\times n$-Matrix mit (i,j)-Eintrag $c a_{ij}$ für $1\le i\le m$, $1\le j\le n$.

Beispiel: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$(-2) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & -10 \end{bmatrix}.$$

Bemerkung 1.4 Es gelten die folgenden Rechenregeln. Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(a) $A + B = B + A$ und $A + (B + C) = (A+B)+C$.

$(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $O_{m \times n} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Inverses Element zu $A = [a_{ij}]$ ist $-A := [-a_{ij}]$.

(b) Seien $c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$(c+d) \cdot A = cA + dA \qquad c \cdot (A+B) = cA + cB$

$(c \cdot d) \cdot A = c \cdot (d \cdot A) \qquad 1 \cdot A = A$.

Dies folgt unmittelbar durch einfaches Nachrechnen aus den entsprechenden Regeln in $\mathbb{R}$. $\square$

Def 1.5 Seien $m, n, p \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Dann ist das Produkt $A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ definiert als die $m \times p$-Matrix mit (i,j)-Eintrag

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{für } 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le p.$$

Also $A \cdot B = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right]_{1 \le i \le m,\ 1 \le j \le p}$.

Beachte: Um Produkt bilden zu können, muß A soviele Spalten wie B Zeilen haben!

Beispiel:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2×3 $\quad$ 3×4

Ergebnis wird eine 2×4-Matrix $\quad C = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le 2 \\ 1 \le j \le 4}}$

$c_{11} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 5 \cdot 0 = 2$ $\qquad$ $c_{21} = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 7 \cdot 0 = 4$

$c_{12} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 8$ $\qquad$ $c_{22} = \ldots 8$

$c_{13} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 6$ $\qquad$ $c_{23} = 7$

$c_{14} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 1$ $\qquad$ $c_{24} = 0$

Also $\quad C = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$

Spezialfall $m = 1$, $p = 1$ "Zeile $\times$ Spalte":
$$(3 \ 1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = [3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4] = [10]$$
$$= 10.$$

(i,j)-Eintrag von C oben = i-te Zeile von A mal j-te Spalte von B

Üben Sie dies selbst in einigen Beispielen

Bemerkung 16 (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ und $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Wir können also Produkte $A \cdot B$, $B \cdot C$ bilden. Dann gilt
$$\underbrace{(A \cdot B)}_{m\times p} \cdot \underbrace{C}_{p\times q} = \underbrace{A}_{m\times n} \cdot \underbrace{(B \cdot C)}_{n\times q} \in \mathbb{R}^{m\times q}.$$

(b) Sei $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

Dann gilt
$$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$
$$D \cdot (A+B) = D \cdot A + D \cdot B.$$

Beweis: Wiederum Nachrechnen.

z.B. zu (a): Sei $X = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times p}$.

$$(X\cdot C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} x_{ik} c_{kj} \text{ und } x_{ik} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk}$$

Also $$((A\cdot B)\cdot C)_{ij} = (X\cdot C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{l=1}^{n}(a_{il}b_{lk})c_{kj}\Big)$$

Andererseits sei $Y = B \cdot C \in \mathbb{R}^{n\times q}$.

$$(A\cdot Y)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_{kj} \text{ und } y_{kj} = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj}.$$

Damit $$(A\cdot(B\cdot C))_{ij} = (A\cdot Y)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}(b_{kl}\cdot c_{lj})$$

$$\underset{\uparrow}{=} \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{il}(b_{lk}\cdot c_{kj}). \quad \checkmark$$

vertausche Summen, benenne Laufvariablen um, benutze Assoziativität in $\mathbb{R}$.

Beweise für die Regeln in (b) sind völlig analog (aber viel einfacher). $\square$

Satz 1.7 Sei $m = n$. Dann ist $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement $I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

"Einheitsmatrix"

Beweis: Aus Bem. 1.4 folgt: $(M_n(\mathbb{R}), +)$ ist eine abelsche Gruppe. Aus Bem. 1.6 folgt, daß Multiplikation assoziativ ist und die Distributivregeln gelten. Aus Def. von $\cdot$ folgt sofort:

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A \quad \text{für alle } A \in M_n(\mathbb{R}).$$

Also ist $M_n(R)$ ein Ring mit Einselement I_n.

<u>Frage:</u> Ist $M_n(R)$ kommutativ (bzgl. $\cdot$) ?

<u>$n=1$</u> $M_1(R) = \{[a] \mid a \in R\}$.

$$[a]\cdot[b] = [ab] \underset{\substack{\uparrow \\ R \text{ kommutativ}}}{=} [b\cdot a] = [b]\cdot[a]$$

also $M_1(R)$ kommutativ.

<u>$n=2$</u> z.B.

$$\left.\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \neq$$

also $M_2(R)$ nicht kommutativ.

<u>$n>2$:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Also:</u> $M_1(R)$ kommutativ

$M_n(R)$ nicht kommutativ für $n \geq 2$.

<u>Def. 1.8</u> Sei $m=n$. Eine Matrix $A \in M_n(R)$ heißt "invertierbar" (oder "regulär") wenn es eine Matrix $B \in M_n(R)$ gibt mit

$$A\cdot B = B\cdot A = I_n. \qquad \text{Bezeichnung: } B := A^{-1}$$

<u>Beispiele</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$ ist invertierbar mit Inversem $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$

Aber: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ hat kein Inverses in $M_2(\mathbb{Z})$!

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist niemals invertierbar, denn angenommen, es gibt $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mit $A \cdot B = BA = I_2$, so folgt

$$\underset{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{I_2} = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lightning$$

Widerspruch.

<u>Bemerkung 1.9</u> Sei $m = n$ und $A \in M_n(R)$.

Werden später bessere Kriterien finden, um zu zeigen, daß A invertierbar ist und A^{-1} zu berechnen.

Außerdem: Ist $R = K$ ein Körper, so gilt: Ist $B \in M_n(K)$ mit $A \cdot B = I_n$, so folgt automatisch $B \cdot A = I_n$ (Dies ist nicht offensichtlich!)

<u>Satz 1.10</u> Sei $m = n$. Dann ist

$$GL_n(R) := \{ A \in M_n(R) \mid A \text{ invertierbar} \}$$

eine Gruppe bzgl. $\circ$. Neutrales Element ist $I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$.

$GL_n(R)$ heißt allgemeine lineare Gruppe.

Dies ist abelsch für $n = 1$, nicht-abelsch für $n > 1$.

<u>Beweis</u>: Nach Satz 1.7 ist Multiplikation $\circ$ in $M_n(R)$ assoziativ und I_n neutrales Element bzgl. $\circ$.

Sind $A, B \in M_n(R)$ invertierbar, so ist auch

$A \cdot B$ invertierbar, mit $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ siehe Kap. 0, Bem. 7.2 (b).

Also $\cdot : GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$
$(A, B) \mapsto A \cdot B$

Verknüpfung, alle Axiome für Gruppe erfüllt.

Für $n = 2$ ist diese nicht-abelsch, denn sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Für $n > 2$ betrachte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

ebenfalls $A \cdot B \neq B \cdot A$. $\square$

Bemerkung 1.11 Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Für $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$ heißt

$$E_{ij}^{(m,n)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & - & - & 0 \\ & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & - & - & 0 \end{bmatrix} \leftarrow i \\ \uparrow \\ j \end{array} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Elementar-Matrix

(also (i,j)-Eintrag 1, sonst alle Einträge gleich Null). Ist auch $p \in \mathbb{N}$ und $1 \le k \le n$ ~~[illegible]~~, $1 \le l \le p$

$$\underbrace{E_{ij}^{(m,n)}}_{\in \mathbb{R}^{m\times n}} \cdot \underbrace{E_{kl}^{(n,p)}}_{\in \mathbb{R}^{n \times p}} = \delta_{jk} E_{il}^{(m,p)} \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

Kronecker-Delta $= \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$

Ebenso $Ae_i =$ i-te Spalte von A etc.

§2 Elementare Umformungen und das Gauß-Verfahren

Sei K ein Körper.

Def. 2.1 Ein lineares Gleichungssystem ist ein Gleichungssystem der Form

$$\left.\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + \dots & + a_{1n} & x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots & + a_{2n} & x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots & + a_{mn} & x_n & = b_m \end{array}\right\} (*)$$

wobei $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in K$, $b_i \in K$ vorgegeben, $x_i \in K$ gesucht. (m Gleichungen, n Unbekannte).

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \text{ Lösung von } (*) \right\}$$

heißt Lösungsmenge des Gleichungssystemes.

Bemerkung 2.2 Sei $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in K^{m\times n}$

und $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in K^m$. Seien $x_1, \dots, x_n \in K$. Dann

gilt: $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in L \iff A \cdot x = b$ ← Definition des Matrixprodukts.

(d.h. $x_1, \dots, x_n$ Lösung von $(*)$)

Die Matrix $[A \mid b] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in K^{m\times(n+1)}$

heißt erweiterte Matrix von $(*)$.

Beisp. 2.3 (a) $\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{array}$ ist ein lineares

K beliebig

Gleichungssystem, das offenbar keine Lösung hat

Erweiterte Matrix $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ $\quad L = \emptyset$.

(b) $\quad x_1 + x_2 = 1$ $\quad$ ist ein lineares

$K = \mathbb{Q}$ $\quad x_2 - x_3 = 2$ $\quad$ Gleichungssystem

mit erweiterter Matrix $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$

Lösung: $x_2 = 2 + x_3$ aus 2. Gleichung

Setze in 1. Gleichung ein: $x_1 + (2 + x_3) = 1$

also $x_1 = -1 - x_3$.

$$\Rightarrow \quad L = \left\{ \begin{pmatrix} -1 - x_3 \\ 2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \text{ beliebig} \right\}.$$

(c) $\quad x_1 + x_2 = 2$ $\quad$ erweiterte Matrix

$K = \mathbb{Q}$. $\quad 2x_1 - x_2 = 1$ $\quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$

Lösung: Addiere 1. zur 2. Gleichung: $3x_1 = 3$ also $x_1 = 1$.

Setze in 1. Gleichung ein: $1 + x_2 = 2$

also $x_2 = 1$.

Damit $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ genau eine Lösung

Wir sehen also: es kann gar keine Lösungen geben, genau eine oder sogar unendlich viele Lösungen.

Systematisches Lösungsverfahren:

Gauß-Elimination

Forme Gleichungen um, so daß System (*) einfachere Gestalt bekommt und man dort die Lösungen leichter sieht.

Satz 2-4 Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem (*), (11)
mit erweiterter Matrix $[A|b] \in K^{m \times (n+1)}$ und
Lösungsmenge ~~(**)~~ $L \subseteq K^n$. Dann ändert sich L
nicht, wenn man:

(1) zwei Zeilen in $[A|b]$ vertauscht

(2) eine Zeile in $[A|b]$ mit einem $0 \neq c \in K$
durchmultipliziert.

(3) das c-Fache einer Zeile von $[A|b]$ (für
ein $c \in K$) zu einer anderen Gleichung addiert.

Beweis: Sei $[A'|b'] \in K^{m \times (n+1)}$ neue erweiterte
Matrix und $L' \subseteq K^n$ Lösungsmenge des zugehörigen
linearen Gleichungssystem. Wollen zeigen $L = L'$.

Klar für (1). Zu (2): Sei $1 \leq i \leq m$ und
$0 \neq c \in K$ so daß i-te Zeile von $[A'|b]$ gegeben
durch $[ca_{i1} \quad ca_{i2} \quad \cdots \quad ca_{in} \quad cb]$
(alle anderen Zeilen wie in $[A|b]$)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in L \Rightarrow a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

$$\Rightarrow ca_{i1}x_1 + \dots + ca_{in}x_n = c(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) = cb$$

also $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in L'$.

Umgekehrt: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in L' \Rightarrow ca_{i1}x_1 + \dots + ca_{in}x_n = cb$

$$\Rightarrow b = c^{-1}(cb) = c^{-1}(ca_{i1}x_1 + \dots + ca_{in}x_n)$$

$= a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$, also $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in L$.

Zu (3): Seien $1 \leq i, j \leq m$ mit $i \neq j$ und $c \in K$
so daß j-te Zeile von $[A'|b']$ gegeben durch

$$[a_{j1} + ca_{i1} \quad a_{j2} + ca_{i2} \quad \cdots \quad a_{jn} + ca_{in} \quad b_j + cb_i]$$

(alle anderen Zeilen wie in $[A|b]$).

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in L \Rightarrow \begin{matrix} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \text{und } a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (a_{j1} + ca_{i1})x_1 + \dots + (a_{jn} + ca_{in})x_n$$

$$= a_{j1}x_1 + ca_{i1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n + ca_{in}x_n$$

$$= \underbrace{(a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n)}_{=b_j} + c\,\underbrace{(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n)}_{=b_i}$$

$$= b_j + cb_i \checkmark$$

also $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in L'$. Umgekehrt: Sei $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in L'$!

$$\Rightarrow \begin{matrix} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \text{und } (a_{j1} + ca_{i1})x_1 + \dots + (a_{jn} + ca_{in})x_n = b_j + cb_i \end{matrix}$$

$$\Rightarrow a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = (a_{j1} + ca_{i1} - ca_{i1})x_1 + \dots + (a_{jn} + ca_{in} - ca_{in})x_n$$

$$= (a_{j1} + ca_{i1})x_1 + \dots + (a_{jn} + ca_{in})x_n - c(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n)$$

$$= b_j + cb_i - cb_i = b_j$$ also $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in L$. $\square$

<u>Def. 2.5</u> Wir definieren nun elementare Zeilenumformungen für beliebige Matrizen (egal ob sie die erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems sind oder nicht). Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(1) Für $1 \le i, j \le m$ und $i \ne j$ definiere

$$\mathrm{Vert}_{ij} : K^{m\times n} \to K^{m\times n}$$
$$A \mapsto A' :=$$ Matrix die aus A entsteht, wenn man i-te und j-te Zeile vertauscht.

(2) Für $1 \le i \le m$ und $0 \ne c \in K$ definiere

$$\mathrm{Mult}_i(c): \quad K^{m\times n} \to K^{m\times n}$$
$$A \mapsto A' :=$$ Matrix, die aus A entsteht, wenn man i-te Zeile mit c multipliziert

(3) Für $1 \leq i,j \leq m$ mit $i \neq j$ und $c \in K$ definiere

$$\mathrm{Add}_{ij}(c): \quad K^{m\times n} \to K^{m\times n}$$
$$A \mapsto A' :=$$ Matrix, die aus A entsteht, wenn man c-Faches der i-ten Zeile zur j-ten Zeile addiert.

Sind $A, B \in K^{m\times n}$, so sagen wir, daß B aus A durch elementare Zeilenumformungen entsteht (und schreiben $A \to B$), wenn man B aus A durch eine wiederholte Anwendung von Operationen der Form (1), (2), (3) in endlich vielen Schritten erhält.

<u>Satz 26</u> (Gauß-Verfahren oder Gauß-Elimination)
Sei $A \in K^{m\times n}$ beliebig. Dann gilt $A \to B$ wobei B in "Zeilenstufenform" ist, d.h. schreiben wir $B = (b_{ij})_{1\leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n}$, so gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r \leq m$ und Indizes $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$ mit

$$b_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i > r \text{ und alle } 1 \leq j \leq n$$
$$b_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq r \text{ und } 1 \leq j < j_i$$
$$b_{ij_i} = 1 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq r$$
$$b_{kj_i} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq r \text{ und } k \neq i$$

Also:

$$B = \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & 0 & \cdots & \\ & j_1 & & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & 0 & \cdots & \\ & & & j_2 & & 1 & * \cdots * & 0 & \cdots & \\ & 0 & & & & j_3 & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 & * \cdots * \\ \hline 0 & & & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & & & 0 \end{array}\right] \left.\vphantom{\begin{array}{c} 1\\1\\1\\1\\1\\1 \end{array}}\right\} r$$

Die Indizes $j_1, \ldots, j_r$ heißen auch Pivot-Elemente.

Bevor wir dies allgemein beweisen, zuerst ein Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot(-3) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot 3 \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot(-1)$$

noch nicht OK

$$\to \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ j_1 & & j_2 & & j_3 & \end{array} \end{array}$$

also $r = 3$
Pivot-Elemente
$j_1 = 1,\ j_2 = 3,\ j_3 = 5$

Beweis: Vollständige Induktion nach m.

Induktionsanfang $m = 1$ $\quad A = [a_{11} \cdots a_{1n}]$

1. Fall: alle $a_{1j} = 0 \quad \to \quad A = [0\ 0 \cdots 0]$
hat Stufenform mit $r = 0$.

2. Fall: Sei $j_1 := \min\{j \mid a_{1j} \neq 0\}$.

also $A = [0 \cdots 0 \ a_{1j_1} \ * \cdots *]$
irgendwelche Einträge

Multipliziere mit $a_{1j_1}^{-1}$, erhalte

$$A \to \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ j_1 \end{array}$$

Stufenform mit $r = 1$.

<u>Induktionsschritt</u> Aussage sei bereits bewiesen für alle $m \times n$-Matrizen. Betrachte nun $A \in K^{(m+1) \times n}$.

<u>1. Fall</u>: alle $a_{ij} = 0$ d.h. $A = O_{(m+1) \times n}$.

Dann hat A Stufenform mit $r = 0$

<u>2. Fall</u>: $A \neq O_{(m+1) \times n}$. Sei

$j_1 := \min \{ j \mid j\text{-te Spalte von } A \text{ ist nicht die Nullspalte} \}$

Also $$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & a_{ij_1} & * \\ 0 & \cdots & 0 & & \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ j_1-Spalte

es gibt ein $1 \leq i \leq m$ mit $a_{ij_1} \neq 0$

Vertausche i-te Zeile und 1. Zeile, multipliziere danach 1. Zeile mit $a_{ij_1}^{-1}$, also

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & a'_{2j_1} & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a'_{mj_m} & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Dann addiere nacheinander:

das $(-a'_{2j_1})$ Fache der 1. Zeile zur 2. Zeile

das $(-a'_{3j_1})$ - Fache der 1. Zeile zur 3. Zeile

$\vdots$

das $(-a'_{mj_1})$ - Fache der 1. Zeile zur m-ten Zeile

Erhalte
$$A \longrightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & B & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{array}\right]}_{\qquad\qquad\quad j_1}$$

Sei $B \in K^{m \times n}$ die Matrix, die aus den letzten m Zeilen besteht. Nach Induktion kann man diese auf Zeilenstufenform bringen, also

$$A \longrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * \cdots * & * & & & & & & * \\ \vdots & & & & & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & 0 & * & \cdots \\ \vdots & & & & & & & 1 & * \cdots * & 0 & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & & & & & & & 1 & \cdots & \end{array}\right] \\ \qquad\quad j_1 \qquad\quad j_2 \qquad j_3 \qquad j_r \end{array}$$

und $0 \leq r \leq m+1$

Schließlich addiere noch passende Vielfache zur 1. Zeile, um Einträge in 1. Zeile und Spalten $j_2, \ldots, j_{r+1}$ zu Null zu machen. Damit A auf Stufenform gebracht. $\square$

<u>Bemerkung</u>: Obiger Beweis liefert einen Algorithmus, den Sie leicht selbst programmieren können (sehr gute Programmieraufgabe!)

GAP $\rightsquigarrow$ Echelonise Mat

Zeilenstufenform $\equiv$ Row echelon form.

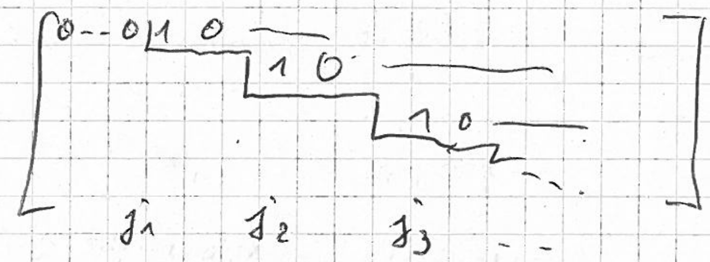
<u>Bemerkung 2.7</u> Analog zu elementaren Zeilenumformungen kann man natürlich auch elementare Spaltenumformungen definieren

<u>Folgerung 2.8</u> Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann kann man A durch eine endliche Folge von Zeilenumformungen und Spaltenumformungen

auf die Form $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}}_{r} \Big\} r$ bringen, mit einem $r \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$.

<u>Beweis</u>: zunächst bringe A auf Zeilenstufenform wie in Satz 2.6. Dann addiere passende Vielfache der Spalten zu den Pivotelementen $j_1, \dots, j_r$ zu jeweils weiter rechts stehenden Spalten. Also

$A \Rightarrow$ (Zeilen- und Spaltenumformungen)



Danach vertausche Spalten, so daß die Einsen ganz links stehen. □

<u>Obiges Beispiel:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\cdot(-2)$ $\cdot(-2)$ $\cdot(-1)$ etc.

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark \quad r = 3.$$

Werden später sehen, daß dieses r durch A eindeutig bestimmt ist, egal wie man den Algorithmus (d.h. egal in welcher Reihenfolge man die einzelnen Zeilen- und Spaltenumformungen) ausführt.

Zurück zu linearen Gleichungssystemen.

Seien $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$ gegeben.

Gesucht $L = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \mid A \cdot x = b \right\}$.

Betrachte erweiterte Matrix $[A/b]$, bringe diese auf Zeilenstufenform $[A'/b'] \in K^{m\times(n+1)}$

mit $0 \leq r \leq m$ und Pivotelementen $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n+1$

1-Fall: $j_r = n+1$. Dann lautet die r-te Gleichung
$r \geq 1$,

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_r' = 1 = 0$$

Also $L = \emptyset$ in diesem Fall.

2. Fall: $j_r \leq n$ Dann hat Gleichungssystem die
$r \geq 1$,

Form

$$x_{j_1} + \sum_{k=j_1+1}^{n} a_{1k}' x_k = b_1'$$

$$x_{j_2} + \sum_{k=j_2+1}^{n} a_{2k}' x_k = b_2'$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_{j_r} + \sum_{k=j_r+1}^{n} a_{rk}' x_k = b_r'$$

Also sind alle x_k außer $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\}$ frei wählbar; $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ sind jeweils durch obige Gleichungen bestimmt

0. Fall: $r = 0$ Dann $[A'/b'] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

und $L = K^n$.

Beisp. 2.9 (a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ $[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Also $r = 2$

$j_2 = 3$ $\quad L = \emptyset$ v.

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \quad x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$

$r = 2 \quad j_1 = 1 \quad j_2 = 2.$ Neue Gleichungen:

$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \to \begin{array}{l} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = 2 + \underbrace{x_3}_{\text{freie Variablen}} \end{array}$

Pivots

also $L = \left\{ \begin{bmatrix} 1 - x_3 \\ 2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \ x_3 \in K \right\}.$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right].$

$K = \mathbb{Q}$ $\quad \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$r = 2 \quad j_1 = 1 \quad j_2 = 2$ neue Gleichungen

$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ keine freien Variablen → eindeutige Lösung

$L = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ siehe Beisp. 2.3(c).

Noch einmal weiteres Beispiel über $K = \mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} \qquad\qquad 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

(siehe oben)

$r = 3, \ j_1 = 1, \ j_2 = 3, \ j_3 = 5$ freie Variablen x_2, x_4

Neue Gleichungen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_5 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 - 2x_2 - 2x_4 \\ x_3 &= 1 - x_4 \\ x_5 &= \underbrace{1}_{\text{freie Variablen}} \end{aligned}$$

Pivots.

Also

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} 1-2x_2-2x_4 \\ x_2 \\ 1-x_4 \\ x_4 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_2, x_4 \in \mathbb{Q} \text{ beliebig} \right\}.$$

<u>Wichtiger Spezialfall:</u> $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$

Ist $r = n \leq m$ und $j_r \leq n$, so gibt es keine freie Variablen, $j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_r = n$.

und Gleichungssystem eindeutig lösbar

$$[A \mid b] \to [A' \mid b'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & b_1' \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & b_n' \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_n' \end{bmatrix} \right\}$$

Weitere Beispiele in den Übungen, vor allem auch mit anderen Körpern etwa $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$.

§3 Anwendungen und Ergänzungen

Als erstes werden wir die elementaren Zeilenumformungen in §2 mit Hilfe von geeigneten Matrixprodukten ausdrücken. Sei K Körper.

Def. 3.1 Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren folgende Matrizen in $M_m(K)$:

(a) Für $1 \le i, j \le m$ und $i \neq j$ sei

$$V_{ij} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$$

$$= \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ 0 & & & & \ddots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & i & & j & \end{array} & \end{array}$$

(b) Für $1 \le i \le m$ und $0 \neq c \in K$ sei

$$M_i(c) = I_n + (c-1) E_{ii} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & \uparrow & & \\ & & i & & \end{array} & \end{array}$$

(c) Für $1 \le i, j \le m$ mit $i \neq j$ und $c \in K$ sei

$$A_{ij}(c) = I_n + c\, E_{ji} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & c & 1 & \\ & & & & \ddots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & & \uparrow & \uparrow & & \\ & & i & j & & \end{array} & \end{array}$$

Diese Matrizen heißen ebenfalls Elementarmatrizen.

Satz 3.2 Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann gilt:

(a) $V_{ij} \cdot A = \text{Vert}_{ij}(A)$ siehe Def. 2.5.
(vertausche i-te und j-te Zeile in A).

(b) $M_i'(c) \cdot A = \text{Multi}_i(c)(A)$
(multipliziere i-te Zeile in A mit c)

(c) $A_{ij}(c) \cdot A = \text{Add}_{ij}(c)(A)$
(addiere c-Faches der i-ten Zeile zur j-ten Zeile in A.)

Entsprechende Aussagen gelten auch für $B \in K^{n \times m}$ und $B \cdot V_{ij}$, $B \cdot M_i(c)$, $B \cdot A_{ij}(c)$ wobei Operationen auf Spalten vorgenommen werden.

Beweis: Sei $A = [a_{ij}]_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n}$. Dann

$$A = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} E_{rs}$$

[Elementarmatrix in Bem. 1.11.

Nun z.B. $V_{ij} \cdot A = (I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj})A$

$$= A + \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \big(a_{rs} E_{ij} E_{rs} + a_{rs} E_{ji} E_{rs} - a_{rs} E_{ii} E_{rs} - a_{rs} E_{jj} E_{rs} \big)$$

unterscheide mehrere Fälle und stelle fest, daß im Ergebnis einfach die i-te und j-te Zeile vertauscht sind.

Benutze Produktregel in Bem. 1.11.

Führen Sie die Details selbst aus und machen Sie sich dies in einigen Beispielen selbst klar. $\square$

Bemerkung 3.3 Die Matrizen V_{ij}, $M_i(c)$ und $A_{ij}(c)$ in Def. 3.1. sind invertierbar, denn es gilt:

$V_{ij} \cdot V_{ij} = I_n$, $M_i(c) \cdot M_i(c^{-1}) = M_i(c^{-1}) \cdot M_i(c) = I_n$

und $A_{ij}(c) \cdot A_{ij}(-c) = A_{ij}(-c) \cdot A_{ij}(c) = I_n$,

wie man sofort mit Hilfe der Interpretation in Satz 3.2 (als elementare Zeilenumformungen) sieht. Außerdem: Inverse sind wieder Elementarmatrizen. Also kann man Satz 2.6 (Gauß-Verfahren) auch so formulieren:

Folgerung 3.4 Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann gibt es endlich viele Elementarmatrizen $U_1, \dots, U_\ell \in K^{m \times m}$ wie in Def. 3.1 so daß

$$U_1 U_2 \dots U_\ell A = A' \text{ in Zeilenstufenform ist}$$

Beweis: Satz 2.6 + Satz 3.2 □

Definition 3.5 Sei $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$. Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ heißt homogen, wenn $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. In diesem Fall gibt es immer eine Lösung, nämlich $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ist $b \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, so heißt das Gleichungssystem inhomogen.

Satz 3.6 Sei $A \in K^{m \times n}$ mit $m < n$.
Dann hat das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ eine Lösung $x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Beweis: Erweiterte Matrix ist $\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right]$

Bring auf Stufenform $\rightarrow \left[\begin{array}{c|c} A' & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right]$.
mit $0 \leq r \leq m$ und Pivotelementen $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n+1$.

~~[illegible]~~ Die letzte Spalte ist 0, also folgt $j_r \le n$ und damit ist das Gleichungssystem lösbar, siehe § 2.

Wegen $r \le m < n$ können $n - r > 0$ Variablen frei gewählt werden. Insbesondere können wir diese freien Variablen gleich 1 setzen, erhalten also auf jeden Fall mindestens eine Lösung $x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\square$

<u>Satz 3.7</u> (Charakterisierung invertierbarer Matrizen)

Sei $m = n$ und $A \in M_n(K)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $A \to I_n$ (Gauß-Verfahren liefert I_n)

(b) A ist Produkt von Elementarmatrizen wie in Def. 3.1.

(c) A ist invertierbar, d.h. es gibt $B \in M_n(K)$ mit $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

(d) Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0_m$ hat nur die Lösung $x = 0_n$.

<u>Beweis</u>: "a) $\Rightarrow$ b)" Nach Folgerung 3.4 gibt es Elementarmatrizen $U_1, \dots, U_\ell \in M_n(K)$ wie in Def. 3.1 mit

$$U_1 U_2 \cdots U_\ell A = A' \underset{\text{Voraussetzung in a)}}{=} I_n$$

Nach Bemerkung 3.3 sind $U_1^{-1}, \dots, U_\ell^{-1}$ ebenfalls Elementarmatrizen. Also

$$A = U_\ell^{-1} \cdots U_2^{-1} U_1^{-1} I_n = U_\ell^{-1} \cdots U_1^{-1}$$

damit b).

"b) ⇒ c)" Nach Bem 3.3 sind Elementarmatrizen invertierbar. Ist $A = U_1 \cdots U_e$ mit Elementarmatrizen $U_1, \ldots, U_e$, so setze $B := U_e^{-1} \cdots U_1^{-1} \in M_n(K)$. Dann $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, also A invertierbar.

"c) ⇒ d)" Betrachte $Ax = 0_n$. Da A invertierbar, gibt es $B \in M_n(K)$ mit $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Also folgt $x = I_n x = (BA)x = B(Ax) = B 0_n = 0_n$. Also ist $x = 0_n$ einzige Lösung.

"d) ⇒ a)" Bringe A auf Zeilenstufenform A'. Also $A \to A'$ mit $0 \leq r \leq n$ und Pivots $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$. Nach Satz 2.4 haben $Ax = 0_n$ und $A'x = 0_n$ die gleiche Lösungsmenge, also hat auch $A'x = 0_n$ nur die Lösung $x = 0_n$. Also kann es keine freien Variablen geben, d.h. $r = n$. Wegen $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$ folgt $j_1 = 1, \ldots, j_n = n$, also $A' = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I_n$ □

<u>Folgerung 3.8</u> (Verfahren zum Berechnen von A^{-1})
Sei $A \in M_n(K)$ und betrachte $[A \,\vdots\, I_n] \in K^{n \times 2n}$. Bringe diese Matrix auf Zeilenstufenform, also

$$[A \,\vdots\, I_n] \longrightarrow [A' \,\vdots\, B] \text{ mit}$$

$A', B \in M_n(K)$, $0 \leq r \leq n$, Pivots $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq 2n$. Dann gilt $n = r$ und es gibt 2 Fälle:
1) $j_r > n$. Dann ist A nicht invertierbar.
2) $j_r = n$. Dann ist A invertierbar, $A' = I_n$ und $B = A^{-1}$.

<u>Beweis</u>: Nach Folgerung 3.4 gibt es Elementar-

mehrere $U_1, \ldots, U_\ell \in M_n(K)$ mit $U_1 \cdots U_\ell \, [A \mid I_n] = [A' \mid B]$

Nach Def. des Matrixproduktes folgt:

$(*)$ $U_1 \cdots U_\ell A = A'$ und $U_1 \cdots U_\ell I_n = U_1 \cdots U_\ell = B$.

Annahme: $r < n$. Dann letzte Zeile von A' und B gleich 0. Wegen $(*)$ ist $B = U_1 \cdots U_\ell$ invertierbar, also $B \to I_n$ nach Satz 3.7. Also kann letzte Zeile von B nicht gleich 0 sein; Widerspruch.

Also $r = n$.

1. Fall: $j_r > n$. Dann

$$[A' \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|cccc} & \ddots & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ j_r \end{array}$$

also letzte Zeile von A' gleich 0.

Wie oben folgt: A' nicht invertierbar. Wäre A invertierbar, so folgt aus $(*)$, daß auch $A' = U_1 \cdots U_\ell A$ invertierbar, Widerspruch. Also A nicht invertierbar.

2. Fall: $j_r \leq n$. Wegen $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$ folgt $r = n$

nun $j_1 = 1, \ldots, j_n = n$ und damit $A' = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I_n$.

Mit $(*)$ folgt $U_1 \cdots U_\ell A = A' = I_n$, also A invertierbar und $A^{-1} = U_1 \cdots U_\ell = B$ $\square$

Beispiel $K = \mathbb{F}_2$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(K)$

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{also } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

prüfe nach!

Bemerkung 3.9 Sei $A \in M_n(K)$. Ist $B \in M_n(K)$ Matrix mit $A \cdot B = I_n$, so folgt $B \cdot A = I_n$.

Beweis: Betrachte lineares Gleichungssystem $Bx = 0_n$. Ist $x \in K^n$ Lösung, so folgt

$$x = I_n x = (AB)x = A(Bx) = A0_n = 0_n.$$

Also gibt es nur die Lösung $x = 0_n$, nach Satz 3.7 ist B invertierbar, also existiert $C \in M_n(K)$ mit $BC = CB = I_n$. Aber dann

$$A = A \cdot I_n = A(BC) = (AB)C = I_n C = C.$$

also A invertierbar und $B = A^{-1}$ □

Lemma 3.10 Sei $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ spaltenstochastisch, d.h. es gilt $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ für $1 \le j \le n$. (Summe der Einträge in jeder Spalte ist $= 1$). Dann gibt es einen "stationären" Vektor $x \in K^n$, d.h. $x \neq 0_n$ und $Ax = x$.

Beweis: Wir zeigen zuerst: $A - I_n \in M_n(K)$ ist nicht invertierbar. Annahme: doch! Dann gibt es $B \in M_n(K)$ mit $(A - I_n)B = B(A - I_n) = I_n$.
Betrachte $v = [1\ 1\ \cdots\ 1] \in K^{1 \times n}$.
Wegen $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ für $1 \le j \le n$ folgt $v \cdot A = v$

und damit $0 = v(A - I_n)$.

Aber dann: $0 = (v(A-I_n))B = v(\underbrace{(A-I_n)B}_{=I_n}) = v$ ↯.

Also war Annahme falsch, d.h. $A - I_n$ ist nicht invertierbar. Satz 3.7: es gibt $0 \neq x \in K^n$ mit $(A - I_n)x = 0$, d.h. $Ax = x$. □

Beispiel 3.11 Ein Unternehmen verkauft 2 Produkte A, B (z.B. Waschmittel) und möchte ein 3. Produkt C einführen. Aufgrund von Umfragen geht man davon aus, daß:

- von den Kunden, die A gekauft haben, 50% dabei bleiben, im nächsten Monat aber 10% B und 40% C kaufen würden
- Käufer von B bleiben zu 60% treu, 30% wechseln zu C und 10% zu A.
- Von denen, die C gekauft hatten, wechselt keiner zu A und nur 10% zu B.

Frage: Gegenwärtig werden 10000 Produkte verkauft, 30000 mal A und 70000 mal B.

Wie werden sich diese Zahlen langfristig von Monat zu Monat mit dem neu angebotenen C verändern, wenn insgesamt weiterhin 100 000 Produkte verkauft werden sollen.

Lösung Sei $x^{(n)} = \begin{pmatrix} a^{(n)} \\ b^{(n)} \\ c^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit

$a^{(n)} :=$ Verkaufszahl von A nach n Monaten

$b^{(n)} :=$ —— " —— B —— " ——

$c^{(n)} :=$ —— " —— C —— " ——

Dann gilt aufgrund obiger Umfragen:

$$x^{(n+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 & 0,9 \end{bmatrix}}_{A \in M_3(\mathbb{R})} x^{(n)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

wobei $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 30000 \\ 40000 \\ 0 \end{bmatrix}$ aktueller Zustand.

A heißt in diesem Zusammenhang "Übergangsmatrix" des Prozesses. Da es sich um Prozentzahlen handelt, ist A spalten-stochastisch!

Es folgt nun $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

müssen also Potenzen von A berechnen.

Es herrscht ein Gleichgewichtszustand, wenn sich die Verkaufszahlen von einem Monat zum nächsten nicht mehr ändert (→ Planungssicherheit).

d.h. suche $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = x$.

Einen solchen Vektor gibt es nach Lemma 3.10:

Löse $(A - I_3)x = 0$.

$$\begin{bmatrix} -0,5 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 & -0,1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\to \;--\; \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/19 \\ 0 & 1 & -5/19 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allgemeine Lösung (eine freie Variable: $c = x_3$):

$$\begin{bmatrix} 1/19\,c \\ +5/19\,c \\ c \end{bmatrix} \quad \text{für } c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{19}c + \frac{5}{19}c + c = 100000 \Rightarrow c = 76000$$

Also Gleichgewichtszustand $a = 4000$, $b = 20000$, $c = 76000$

Berechne $Ax^{(0)}, A^2x^{(0)}, A^3x^{(0)}, \ldots$

Man findet, daß $A^{(32)} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 20000 \\ 76000 \end{pmatrix}$

also wird Gleichgewichtszustand nach 32 Monaten erreicht.

<u>Beispiel 3.12</u> (Google PageRank)

benutze Folien aus Vortrag zum Wissenschaftstag.

§4 Eigenwerte von Matrizen

Sei stets K beliebiger Körper, $A \in M_n(K)$

In den Beispielen in §3 haben wir stationäre Vektoren für A kennengelernt, also $0 \neq x \in K^n$ mit $Ax = x$. Etwas allgemeiner definieren wir:

<u>Def. 4.1</u> Sei $\lambda \in K$. Dann heißt λ ein <u>Eigenwert</u> von A, wenn es ein $0 \neq v \in K^n$ gibt mit $Av = \lambda v$. In diesem Fall heißt v ein zu λ gehöriger Eigenvektor.

Ein stationärer Vektor ist also einfach ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Eigenwerte sind sowohl für die Entwicklung der weiteren Theorie als auch in vielen Anwendungen wichtig und hilfreich.

Hauptfrage, die wir in diesem Abschnitt behandeln: Wie findet man die Eigenwerte von A?

Bemerkung 4.1 Sei $A \in M_n(K)$ und $\lambda \in K$.
Sei $v \in K^n$. Dann gilt:

$$Av = \lambda v = \lambda I_n v \iff Av - \lambda I_n v = 0$$
$$\iff (A - \lambda I_n) v = 0$$

Also: v Eigenvektor $\iff v \neq 0_n$ und $Av = \lambda v$
$\iff v \neq 0_n$ und $(A - \lambda I_n) v = 0$.

Mit Satz 3.7 folgt:
λ Eigenwert $\iff A - \lambda I_n$ nicht invertierbar

Beisp. 4.2 (a) Sei $A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \in M_n(K)$

Diagonalmatrix. Ist $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$ so gilt:

$$Ae_i = i\text{-te Spalte von } A = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_i e_i$$

Also a_i Eigenwert und e_i ist ein zugehöriger Eigenvektor. Sei $\lambda \in K$, $\lambda \neq a_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Dann $A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} a_1-\lambda & & & 0 \\ & a_2-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n-\lambda \end{bmatrix}$ alle Einträge auf Diagonale $\neq 0$.

$\Rightarrow A - \lambda I_n$ invertierbar und damit λ kein Eigenwert.

Also: Eigenwerte sind genau $a_1, \ldots, a_n$.

(b) Allgemeiner: Sei $A = \begin{bmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \in M_n(K)$
obere Dreiecksmatrix.

Behauptung: Eigenwerte sind wiederum genau $a_1, \ldots, a_n$.

Sei zuerst $\lambda \in K$, $\lambda \neq a_i$ für $1 \leq i \leq n$. Dann

$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} a_1-\lambda & & & * \\ & a_2-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n-\lambda \end{bmatrix}$ Einträge auf Diagonalen alle $\neq 0$.

Also liefert Gauß-Algorithmus $\xrightarrow{A-\lambda I_n} I_n$.
Damit $A-\lambda I_n$ invertierbar, also λ kein Eigenwert.

Nun sei $1 \leq i \leq n$ fest. Zu zeigen: a_i Eigenwert,
d.h.
$$A - a_i I_n = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_n \end{bmatrix} & \leftarrow i \\ \uparrow & \\ i & \end{array}$$
nicht invertierbar

Dazu sei $B \in M_i(K)$ die Teilmatrix, die aus den ersten i Zeilen und Spalten von A besteht,
also
$$B = \begin{bmatrix} a_1 & & & * \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & a_{i-1} & \\ 0 & \cdots & 0 & a_i \end{bmatrix} \in M_i(K)$$
und
$$B - a_i I_i = \begin{bmatrix} a_1 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & a_{i-1} & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Letzte Zeile $= 0$, also gibt es für das homogene Gleichungssystem $(B - \lambda I_i)x = 0$ $(x \in K^i)$ mindestens eine freie Variable.
Also gibt es Lösung $0 \neq x \in K^i$, d.h.
$$(B - a_i I_i)\, x = 0.$$
Setze
$$v := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in K^n, \quad v \neq 0.$$
Dann ist
$$(A - a_i I_n)\, v = \left[\begin{array}{c|c} B - a_i I_i & * \\ & * \\ \hline * \cdots * & * \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \left[\begin{array}{c} (B - a_i I_i)\, v \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

also $A - a_i I_n$ nicht invertierbar.
Damit a_i Eigenwert.

(c) Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$.

Sei $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\lambda \in K$

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a+b \end{bmatrix}$$

Ansatz: $\overset{!}{=}$

$$\lambda v = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}.$$

wollen also lösen: $b = \lambda a$ und $a+b = \lambda b$.

Setze $b = \lambda a$ in 2. Gleichung ein:

$$a + \lambda a = \lambda b = \lambda^2 a \Rightarrow (\lambda^2 - \lambda - 1)\, a = 0.$$

Ist $a = 0$, so auch $b = \lambda a = 0$, also kein Eigenvektor. Sei $a \neq 0$, dann $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

$$\lambda^2 - \lambda + \tfrac{1}{4} - 5/4 = (\lambda - 1/2)^2 - 5/4$$

$\Rightarrow (\lambda - 1/2)^2 = 5/4$.

Ist $K = \mathbb{R}$, so 2 Lösungen $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Ist $K = \mathbb{Q}$, keine Lösung!

Problem hängt also auch vom Körper ab.

(d) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ aus Beisp. 3.11. mit $K = \mathbb{R}$

Wissen bereits, daß $\lambda = 10$ Eigenwert ist.

Und sonst? Ansatz $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\lambda \in K$

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a+b \\ a+6b+c \\ 4a+3b+9c \end{bmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \quad \lambda v = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{bmatrix}$$

Wollen also lösen:

$$\lambda a = 5a + b \Rightarrow b = (\lambda - 5)a.$$
$$\lambda b = a + 6b + c \Rightarrow (\lambda - 6)\, b = a + c$$
$$\lambda c = 4a + 3b + 9c.$$

Also $(\lambda-6)(\lambda-5)a = a + c$

$$(\lambda^2 - 11\lambda + 30)\, a = a + c \Rightarrow c = (\lambda^2 - 11\lambda + 29)\, a.$$

Setze alles in 3. Gleichung ein:

$$\lambda(\lambda^2 - 11\lambda + 29)a = 4a + 3(\lambda - 5)a + 9(\lambda^2 - 11\lambda + 29)a$$

Ist $a=0$, so auch $b=(\lambda-5)a=0$ und dann $c=(\lambda^2-11\lambda+29)a=0$, also kein Eigenvektor.

Sei nun $a\neq 0$. Dann können wir a kürzen und erhalten:

$$\lambda(\lambda^2-11\lambda+29) = 4 + 3(\lambda-5) + 9(\lambda^2-11\lambda+29)$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda^3 - 20\lambda^2 + 125\lambda - 250 = 0.$$

Finde Lösung $\lambda = 5$ (2-mal), d.h.

$$\lambda^3 - 20\lambda^2 + 125\lambda - 250 = (\lambda-10)(\lambda-5)^2 \ \checkmark.$$

Wir kommen jeweils auf eine polynomiale Gleichung. Wollen zeigen, daß dies allgemein gilt. Dazu brauchen wir:

<u>Lemma 4.3</u> (Hauptlemma) Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Sei $r \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, \dots, A_r \in K^{m\times n}$ gegeben. Ist $r > n\cdot m$, so gibt es ein

$0 \neq x \in K^r$ mit $x_1 A_1 + \dots + x_r A_r = 0_{m\times n}$.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$

<u>Beweis</u>: Schreibe $A_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$

Seien $x_1, \dots, x_r \in K$.
Wollen Gleichungssystem $x_1 A_1 + \dots + x_r A_r = 0_{m\times n}$ lösen, d.h.

$$x_1 a_{ij}^{(1)} + x_2 a_{ij}^{(2)} + \dots + x_r a_{ij}^{(r)} = 0 \quad \text{für } 1\le i\le m,\ 1\le j\le n.$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem mit insgesamt $n\cdot m$ Gleichungen und r Unbekannten. Ist also $r > n\cdot m$ so gibt es eine

Lösung $\neq 0$ nach Satz 3.6 □

Folgerung 4.4 Sei $m = n$ und $A \in M_n(K)$

Dann gibt es ein $d \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_d \in K$ mit $a_d = 1$ und $A^d + a_{d-1} A^{d-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0$

Beweis: Sei $r = n^2 + 1 \geq 2$ und betrachte die r Matrizen

$$A_1 := I_n,\ A_2 := A,\ A_3 := A^2, \ldots, A_r = A^{r-1} = A^{n^2}$$

Nach Lemma 4.3 gibt es $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in K^r$, $x \neq 0$,

mit $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_r A_r = 0$, also

$$x_1 I_n + x_2 A + x_3 A^2 + \ldots + x_r A^{r-1} = 0.$$

Sei $d \in \mathbb{N}$ so daß $x_{d+1} \neq 0$ und $x_{d+2} = \ldots = x_r = 0$.

Dann gilt auch (weil wir die Terme x_i mit $i > d+1$ einfach weglassen können):

$$x_1 I_n + x_2 A + x_3 A^2 + \ldots + \underbrace{x_{d+1}}_{\neq 0} A^d = 0$$

Multipliziere mit x_{d+1}^{-1} und erhalte gewünschte Gleichung. □.

Def 4.5 Sei $A \in M_n(K)$ und $d \in \mathbb{N}$ minimal, so daß es $a_0, \ldots, a_d \in K$ mit $a_d = 1$ und

$$A^d + a_{d-1} A^{d-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

gibt. Dann heißt $d = d(A)$ der Minimalgrad von A.

Bemerkung 4.6 Sei $A \in M_n(K)$ und $d = d(A)$

der Minimalgrad von A. Dann sind die zugehörigen Koeffizienten $a_0, \dots, a_d \in K$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien auch $b_0, b_1, \dots, b_d \in K$ mit $b_d = 1$ und $A^d + b_{d-1} A^{d-1} + \dots + b_1 A + b_0 I_n = 0$

Ziehe beide Gleichungen voneinander ab und erhalte $(a_{d-1} - b_{d-1}) A^{d-1} + \dots + (a_1 - b_1) A + (a_0 - b_0) I_n = 0$.

Annahme: Es gibt ein $i \in \{0, \dots, d-1\}$ mit $a_i \neq b_i$. Wähle dann dieses i maximal, es gilt also:

$$\underbrace{(a_i - b_i)}_{\neq 0} A^i + \dots + (a_1 - b_1) A + (a_0 - b_0) I_n = 0$$

Dividiere durch $(a_i - b_i)^{-1}$ und erhalte Gleichung

$$A^i + c_{i-1} A^{i-1} + \dots + c_1 A + c_0 I_n = 0$$

mit $c_i \in K$. Beachte: $i > 0$, denn wäre $i = 0$, so $a_0 \neq b_0$ und $(a_0 - b_0) I_n = 0$ Widerspruch.

Aber es ist auch $i \leq d-1$, Widerspruch zur minimalen Wahl von d. $\square$

Def. 4.7 Sei $A \in M_n(K)$, $d = d(A) \geq 1$ Minimalgrad von A und $a_0, \dots, a_d \in K$ die zugehörigen Koeffizienten mit $a_d = 1$ und

$$A^d + a_{d-1} A^{d-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0.$$

Die Funktion $\mu_A : K \to K$ definiert durch

$$\mu_A(x) := x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ für alle } x \in K.$$

heißt dann Minimalgleichung für A.

Einfache Beispiele: $A = 0_{n\times n}$ hat $d = 1$ und $\mu_A(x) = x$ für alle $x \in K$.

(denn $A^1 + 0 \cdot I_n = 0$)

$A = I_n$ hat $d = 1$ und $\mu_A(x) = x - 1$ für alle $x \in K$.

(denn $A^1 - I_n = 0$).

Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mit $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$.

A ist kein Vielfaches von I_2, also $d \geq 2$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= A + I_2.$$

Also $d = 2$ und $\mu_A(x) = x^2 - x - 1$ für alle $x \in K$.

<u>Lemma 4.8</u> Sei $A \in M_n(K)$ und $\lambda \in K$ Eigenwert von A. Sei $0 \neq v \in K^n$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

v ist Eigenvektor zu A^m mit Eigenwert λ^m.

<u>Beweis:</u> Vollständige Induktion nach m.

Anfang $m = 1$: Die Aussage gilt nach Voraussetzung.

Induktionsschritt: Sei $m \geq 1$ und angenommen, die Aussage gilt für m, d.h. $A^m v = \lambda^m v$.

Dann folgt: $A^{m+1} v = (A A^m) v = A(A^m v)$
$$= A(\lambda^m v) = \lambda^m (Av) = \lambda^m (\lambda v) = \lambda^{m+1} v$$
$\square$

<u>Satz 4.9</u> Sei $A \in M_n(K)$ und $\mu_A : K \to K$ die Minimalgleichung für A. Sei $\lambda \in K$.

Dann gilt: λ ist Eigenwert von $A \iff \mu_A(\lambda)=0$

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei $0 \neq v \in K^n$ mit $Av = \lambda v$

Sei $d = d(A) \geq 1$ und $\mu_A(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Nach Lemma 4.8: $A^m v = \lambda^m v$ für alle $m \geq 1$.

Für $m=0$ ist $A^0 = I_n$ und $\lambda^0 = 1$, also gilt $A^m = \lambda^m v$ für alle $m \geq 0$. Damit

$$\left(A^d + a_{d-1}A^{d-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n\right)v$$
$$= A^d v + a_{d-1}A^{d-1}v + \dots + a_1 Av + a_0 v$$
$$= \lambda^d v + a_{d-1}\lambda^{d-1}v + \dots + a_1 \lambda v + a_0 v$$
$$= \left(\lambda^d + a_{d-1}\lambda^{d-1} + \dots + a_1\lambda + a_0\right)v = \mu_A(\lambda)v.$$

Aber linke Seite $=0$ nach Def. von d und $a_0, \dots, a_d$.
Wegen $v \neq 0$ folgt also $\mu_A(\lambda) = 0$.

"$\Leftarrow$" Sei $\lambda \in K$ mit $\mu_A(\lambda) = 0$. Für $i \in \mathbb{N}$ gilt
$$A^i - \lambda^i I_n = (A - \lambda I_n)\, C_i \qquad (*)$$
wobei $C_i = A^{i-1} + \lambda A^{i-2} + \dots + \lambda^{i-2}A + \lambda^{i-1}I_n$.

(Wende Ü5 an $(A^m - B^m) = (A-B)\,C$
mit $B = \lambda I_n$ $\quad C = \sum_{j=0}^{m-1} A^j B^{m-j-1}$
$A \cdot B = B \cdot A$ $\quad = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^{m-1-j}A^j$)

Mit $C_0 := 0$ gilt das auch für $i=0$.

Multipliziere $(*)$ mit a_i und addiere dann all diese Gleichungen:

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{d} a_i A^i}_{\substack{=0 \text{ nach Def.} \\ \text{von } d,\, a_0, \dots, a_d}} - \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{d} a_i \lambda^i\right)}_{\substack{=\mu_A(\lambda)=0 \\ \text{nach Vor.}}} I_n = (A - \lambda I_n)\underbrace{\sum_{i=0}^{d} a_i C_i}_{=:H}$$

Also $\quad (A-\lambda I_n)\,H = 0.$

Nun $C_0 = 0,\ C_1 = I_n$ Für $2 \le i \le d$:

$C_i = A^{i-1}$ + Kombination von $A^{i-2}, \dots, A, I_n$.

Also insgesamt:

$$H = \sum_{i=0}^{d} a_i C_i = \underbrace{a_d}_{=1} C_d + \underbrace{\sum_{i=0}^{d-1} a_i C_i}_{=\text{ Kombination } A^{d-2}, \dots, A, I_n}$$

$= A^{d-1}$ + Kombination von $A^{d-2}, A^{d-3}, \dots, A, I_n$.

d.h. $= A^{d-1} + y_{d-2}A^{d-2} + \dots + y_1 A + y_0 I_n$

mit $y_i \in K$.

Wegen d minimal folgt $H \neq 0$.

Aber dann gibt es auch $w \in K^n$ mit $v := Hw \neq 0$.

Damit $(A-\lambda I_n)\,v = \underbrace{(A-\lambda I_n)H}_{=0} w = 0.$

also $Av = \lambda v$ und $v \neq 0$, also λ Eigenwert $\square$

Verfahren zum Berechnen von $d = d(A)$ und μ_A:

Beginne mit A. Falls $A = c I_n$ für ein $c \in K$,

dann $A - cI_n = 0$, also $d = 1$ und

$\mu_A(x) = x - c$ für alle $x \in K$.

Falls $A \neq c I_n$ für alle $c \in K$, so betrachte

A^2 und teste ob $A^2 = cA + c' I_n$ mit $c, c' \in K$

(lineares Gleichungssystem für c, c')

Wenn ja, dann $d = 2$ und $\mu_A(x) = x^2 - cx - c'$

für alle $x \in K$.

Wenn nein, so betrachte A^3 und teste, ob

$$A^3 = cA^2 + c'A + c'' I_n \quad \text{für } c, c', c'' \in K.$$

Wenn ja, dann $d = 3$ und $\mu_A(x) = x^3 - cx^2 - c'x - c''$ für alle $x \in K$.

usw. Nach endlich vielen Schritten muß dieser Prozess stoppen.

Folgerung 4.4: man muß höchstens bis A^{n^2} gehen.

Werden später zeigen: ———— A^n gehen.

<u>Beisp</u>: $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ aus Beisp. 4.2(d).

$A \neq c I_n$ also $d \geq 2$.

$$A^2 = \ldots = \begin{bmatrix} 26 & 11 & 1 \\ 15 & 40 & 15 \\ 59 & 49 & 84 \end{bmatrix} \overset{!}{=} cA + c' I_n$$

$$= \begin{bmatrix} 5c+c' & c & 0 \\ c & 6c+c' & c \\ 4c & 3c & 9c+c' \end{bmatrix}.$$ unmöglich

also $d \geq 3$: $A^3 = \ldots = \begin{bmatrix} 145 & 95 & 20 \\ 175 & 300 & 175 \\ 680 & 605 & 805 \end{bmatrix}$

$$= cA^2 + c'A + c'' I_n$$

$$= \ldots = 20A^2 - 125A + 250 I_3.$$

Also $d = 3$ und $\mu_A(x) = x^3 - 20x^2 + 125x - 250$ für alle $x \in K$.

also genau die Gleichung, die wir auch in Beisp. 4.2 gefunden hatten. ∇

Mehr Beispiele in den Übungen.

§5 2×2-Matrizen

Bereits für 2×2-Matrizen ergeben sich interessante Anwendungen der bisherigen Theorie: Sei K beliebiger Körper und $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(K)$.

Wir definieren $Sp(A) := a+d \in K$ "Spur" von A

und $\det(A) := ad - bc \in K$ "Determinante" von A

Lemma 5.1 Es gilt $A^2 - Sp(A)\cdot A + \det(A)\, I_2 = 0$.

Beweis: Einfaches Nachrechnen.

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}.$$

$$Sp(A)\cdot A = (a+d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{bmatrix}$$

Also $A^2 - Sp(A)\cdot A = \begin{bmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & cb-ad \end{bmatrix}$

$$= -\det(A)\cdot I_2 \qquad \square.$$

Folgerung 5.2 A invertierbar $\iff \det(A) \neq 0$.

Ist dies der Fall, so gilt $A^{-1} = \det(A)^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Beweis: "$\Leftarrow$" $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$

$$= \det(A)\cdot I_2.$$

Also: $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ A hat Inverses wie oben angegeben.

"$\Rightarrow$" Annahme $\det(A) = 0$. Aus Lemma 5.1 folgt

also $A^2 - Sp(A) A = 0$. Multipliziere mit A^{-1},

erhalte $A - Sp(A) I_2 = 0$, also $A = Sp(A)\, I_2$.

Sei $p = Sp(A) \in K$. Also $A = p I_2 = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}$.

A invertierbar $\Rightarrow$ $p \neq 0$ und dann

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = p^2 \neq 0$$ Widerspruch zur Annahme $\square$

<u>Folgerung 5.3</u> (Minimalgleichung für A).

(a) Ist $a = d$, $b = c = 0$, so $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ und

$$\mu_A(x) = x - a \text{ für alle } x \in K$$

(b) Sonst gilt $\mu_A(x) = x^2 - Sp(A)x + \det(A)$ für alle $x \in K$.

<u>Beweis:</u> (a) In diesem Fall ist $A - a I_2 = 0$, also $d = d(A) = 1$ und $\mu_A(x) = x - a$ für alle $x \in K$.

(b) Gilt $a \neq d$ oder $b \neq 0$ oder $c \neq 0$, so ist A kein Vielfaches von I_2, also $d = d(A) \geq 2$. Mit Lemma 5.1 folgt also $d = d(A) = 2$ und $\mu_A(x) = x^2 - Sp(A)x + \det(A)$ für alle $x \in K$ $\square$.

<u>Beisp. 5.4</u> Gegeben seien $x_0, y_0 \in K$. Dann definieren wir rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n \geq 0}$ und $(y_n)_{n \geq 0}$ durch

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &:= a x_n + b y_n \\ y_{n+1} &:= c x_n + d x_n. \end{aligned}\right\} (*)$$

Rechtfertigung mit Rekursionssatz: Definiere $h: K \times K \to K \times K$ durch $h(x,y) = (ax + by, cx + dy)$.
Dann gibt es $F: \mathbb{N}_0 \to K \times K$ mit $F(0) = (x_0, y_0)$ und $F(n+1) = h(F(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Schreibe $F(n) = (x_n, y_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Dann erfüllen x_n, y_n genau $(*)$

<u>Frage:</u> Geschlossene Formel für x_n, y_n ?

Dazu beachte, daß wir $(*)$ auch als Matrix-gleichung schreiben können:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a x_n + b y_n \\ c x_n + d y_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

Damit $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$

$$= A^2 \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

usw. und allgemein:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

(formaler Beweis mit vollständiger Induktion nach n).

D.h. Um obige Frage zu beantworten, brauchen wir eine geschlossene Formel für die Einträge von A^n für alle $n \in \mathbb{N}_0$!

<u>Bemerkung 5.5</u> Sei $\mu_A(x) = x^2 - px + q$ für alle $x \in K$, wobei $p = Sp(A)$ und $q = \det(A)$.

Satz 4.9: $\lambda \in K$ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \mu_A(\lambda) = 0$

Nehmen wir an, es gibt 2 Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ von A mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann gilt:

$$p = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{und} \quad q = \lambda_1 \lambda_2.$$

<u>Denn:</u> λ_1, λ_2 Eigenwerte $\Rightarrow$ $\mu_A(\lambda_i) = 0$ für $i = 1, 2$

also
$$\lambda_1^2 - p\lambda_1 + q = 0$$
$$\lambda_2^2 - p\lambda_2 + q = 0$$

ziehe Gleichungen voneinander ab und erhalte

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - p(\lambda_1 - \lambda_2) = 0. \quad \text{Aber } \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2)$$

also $(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2) - p(\lambda_1-\lambda_2) = 0$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ also $\lambda_1-\lambda_2 \neq 0$. Multipliziere mit $(\lambda_1-\lambda_2)^{-1}$ und erhalte $\lambda_1+\lambda_2-p=0$, also $p=\lambda_1+\lambda_2$.

Aber dann auch
$$0 = \lambda_1^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda_1 + q$$
$$= \cancel{\lambda_1^2} - \cancel{\lambda_1^2} - \lambda_1\lambda_2 + q$$

also $q = \lambda_1\lambda_2$ □

<u>Satz 5.6</u> A besitze 2 verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann gibt es $A_1, A_2 \in M_2(K)$ mit
$$A^n = \lambda_1^n A_1 + \lambda_2^n A_2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$
Die beiden Matrizen A_1, A_2 sind eindeutig bestimmt durch die Gleichungen
$$I_2 = A_1 + A_2 \quad \text{und} \quad A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2.$$

<u>Beweis</u>: Setze
$$A_1 := \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(A-\lambda_2 I_2) \qquad A_2 := \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(A-\lambda_1 I_2)$$
Dann
$$A_1 + A_2 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\cancel{A} - \lambda_2 I_2 - \cancel{A} + \lambda_1 I_2)$$
$$= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1-\lambda_2)\, I_2 = I_2 \;\checkmark$$
$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1 A - \cancel{\lambda_1\lambda_2 I_2} - \lambda_2 A + \cancel{\lambda_1\lambda_2 I_2}\right)$$
$$= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1-\lambda_2) A = A \;\checkmark$$

Also sind dies genau 2 Matrizen, die obige Gleichungen erfüllen. Nun betrachte

Lemma 5.1: $A^2 - pA + qI_2 = 0$ mit $p = Sp(A)$, $q = \det(A)$

Bem. 5.5: $p = \lambda_1 + \lambda_2$ und $q = \lambda_1\lambda_2$

Damit $0 = A^2 - pA + qI_2 = A^2 - (\lambda_1+\lambda_2)A + \lambda_1\lambda_2 I_2$

$$= \underbrace{(A-\lambda_1 I_2)}_{=(\lambda_2-\lambda_1)A_2}\underbrace{(A-\lambda_2 I_2)}_{=(\lambda_1-\lambda_2)\cdot A_1}.$$

also $= (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)\, A_2 A_1$ wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$

folgt $A_2 A_1 = O_2$. Genauso sieht man auch $A_1 A_2 = O_2$

Nun ist $0 = A_1 A_2 = A_1 \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(A-\lambda_1 I_2)$

also $0 = A_1(A-\lambda_1 I_2) = A_1 A - \lambda_1 A_1$.

und damit $A_1 A = \lambda_1 A_1$.

Es folgt $A_1 A^2 = (A_1 A)A = \lambda_1 \underbrace{A_1 A}_{=\lambda_1 A} = \lambda_1^2 A$

usw. also $A_1 A^n = \lambda_1^n A_1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

(formaler Beweis mit Induktion nach n)

Genauso: $0 = A_2 A_1 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} A_2(A-\lambda_2 I_2)$

also $0 = A_2(A-\lambda_2 I_2) = A_2 A - \lambda_2 A_2$

also $A_2 A = \lambda_2 A$ und dann $A_2 A^n = \lambda_2^n A_2$

für alle $n \in \mathbb{N}$

Damit erhalte:

$$A^n = I_2 \cdot A^n = (A_1 + A_2)A^n = A_1 A^n + A_2 A^n$$

$$= \lambda_1^n A_1 + \lambda_2^n A_2 \qquad \square$$

<u>Beispiel 5.7</u> Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ mit

$f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$

für alle $n \geq 1$.

Wie in Kapitel 0, Beispiel 6.5 erhalte 2 Folgen $(x_n)_{n\geq 0}$ und $(y_n)_{n\geq 0}$ mit $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

und $\quad x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ $\quad$ für alle $n \geq 1$

$y_n = x_{n+1}$.

wobei $x_n = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

anders ausgedrückt:
$$x_{n+1} = y_n$$
$$y_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$
$$= x_n + y_n.$$

Also Spezialfall von Beispiel 5.4 mit $K = \mathbb{R}$,
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad Sp(A) = 1, \det(A) = -1$$

Folgerung 5.3(b) $\rightarrow \quad \mu_A(x) = x^2 - x - 1.$

Löse über $\mathbb{R}$: $\quad \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$

Sei $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $\quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Ist $A^n = \begin{pmatrix} a^{(n)} & b^{(n)} \\ c^{(n)} & d^{(n)} \end{pmatrix}$

so $\quad = \begin{bmatrix} b^{(n)} \\ d^{(n)} \end{bmatrix}$

wollen also Formel für $x_n = b^{(n)}$

$(1,2)$-Eintrag von A^n.

$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$

$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(A - \lambda_2 I_2) \qquad (1,2)$-Eintrag $= \frac{1}{\sqrt{5}}$

$A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}(A - \lambda_1 I_2) \qquad (1,2)$-Eintrag $= -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Satz 5.6 $\Longrightarrow \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right)$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Formel von Moivre / Binet $\sim 1718 / 1843$

Weitere Literatur: Titu Andreescu, Essential Linear Algebra with Applications, Birkhäuser, 2014.