9. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Aufgabe 1. (**S**, 4 Punkte) Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rationaler Zahlen rekursiv durch

$$a_0 := 2, \qquad a_1 := 7 \qquad \text{und} \qquad a_n := a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Finden Sie eine geschlossene Formel für a_n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, indem Sie ein analoges Verfahren wie in Kap. 1, Beispiel 5.7 der Vorlesung verwenden. D.h., finden Sie zunächst zwei Folgen $(x_n)_{n\geq 0}$ und $(y_n)_{n\geq 0}$ wie in Kap. 1, Beispiel 5.4, so dass sich a_n durch die x_n und y_n ausdrücken lässt.

Aufgabe 2. (V) Wir betrachten $V = \mathbb{R}^2$ mit der gewöhnlichen, komponentenweisen Vektoraddition und der skalaren Multiplikation $\mathbb{R} \times V \to V$ gegeben durch

(a) $\lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda x \\ y \end{bmatrix}$ (b) $\lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda x \\ 0 \end{bmatrix}$ (c) $\lambda \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda x \\ \frac{y}{\lambda} \end{bmatrix}$ für $\lambda \neq 0$ und $0 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Entscheiden Sie, ob V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum bezüglich dieser Skalarmultiplikation ist.

Aufgabe 3. (V) Sei K ein Körper und $V = K^2$.

(a) Sei $K = \mathbb{Q}$. Prüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen $U \subseteq V$ Teilräume sind oder nicht:

$$U := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in V \,\middle|\, xy = 0 \right\}, \quad U := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in V \,\middle|\, 2x - y = 0 \right\}, \quad U := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in V \,\middle|\, x + y \geq 0 \right\}.$$

Wenn nicht, so geben Sie jedenfalls genau an, welche Teilraumbedingungen nicht erfüllt sind.

(b) Sei $U \subseteq V$ ein Teilraum mit $\{0\} \neq U \neq V$. Zeigen Sie, dass es ein $0 \neq v \in U$ gibt mit $U = Kv$.

Aufgabe 4. (**S**, 6 Punkte) Im Folgenden sind jeweils ein Vektorraum V über einem Körper K und eine Teilmenge $U \subseteq V$ gegeben. Prüfen Sie, ob es sich dabei um Teilräume handelt oder nicht.

(a) $V = M_n(K)$ und $U := \{A \in M_n(K) \mid A \text{ invertierbar}\}$.

(b) $V = M_n(K)$ und $U := \{A \in M_n(K) \mid A^{\text{tr}} = A\}$.

(c) $V = \text{Abb}(K, K)$ und $U := \{f \in V \mid f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in K\}$.

(d) $V = \text{Abb}(K, K)$ und $U := \{f \in V \mid \exists x \in K : f(x) = 0\}$.

Aufgabe 5. (**S**, 3 Punkte) Sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$.

(a) Zeigen Sie, dass $C(A) := \{B \in M_n(K) \mid AB = BA\}$ ein Teilraum von $M_n(K)$ ist.

(b) Bestimmen Sie $C(A)$ für $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(K)$ und $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_3(K)$.

Aufgabe 6. (Z) In dieser Aufgabe geht es noch einmal um Determinanten von 2×2-Matrizen, im Zusammenhang von analytischer Geometrie in der Ebene.

(a) Gegeben seien zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{mit } a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0.$$

Wir betrachten das von a und b aufgespannte Parallelogramm, also das Parallelogramm mit den Eckpunkten 0_2, a, b und $a + b$. Zeigen Sie, dass dessen Flächeninhalt gegeben ist durch den Absolutbetrag von $\det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\right)$.

(b) Betrachten wir nun eine Gerade G im $\mathbb{R}^2$ (diese muss nicht unbedingt durch den Nullpunkt gehen). Zeigen Sie, dass eine solche Gerade stets wie folgt gegeben ist:

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u_1 x_1 + u_2 x_2 = v \right\}$$

für geeignete $u_1, u_2, v \in \mathbb{R}$ wobei $u_1 \neq 0$ oder $u_2 \neq 0$. Sei G' eine weitere Gerade, gegeben durch

$$G' = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u_1' x_1 + u_2' x_2 = v' \right\}$$

für geeignete $u_1', u_2', v' \in \mathbb{R}$ wobei $u_1' \neq 0$ oder $u_2' \neq 0$. Sei $\Delta := \det\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{bmatrix}\right)$.

Zeigen Sie: Ist $\Delta = 0$, so sind G_1, G_2 parallel (oder gleich). Ist $\Delta \neq 0$, so haben G_1, G_2 genau einen Schnittpunkt; geben Sie Formeln für die Koordinaten dieses Schnittpunktes an.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 18. und 19. Dezember in den Übungsgruppen.