8. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Aufgabe 1. (**S**, 4 Punkte) Sei K ein Körper. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$ax + by = u, \qquad cx + dy = v$$

wobei $a, b, c, d, u, v \in K$ gegeben und $x, y \in K$ gesucht sind. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(K)$. Die Determinante einer 2×2-Matrix wird wie in der Vorlesung definiert.

(a) Zeigen Sie: Ist $\det(A) \neq 0$, so hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung und es gilt

$$x = \det(A)^{-1} \det\left(\begin{bmatrix} u & b \\ v & d \end{bmatrix}\right), \qquad y = \det(A)^{-1} \det\left(\begin{bmatrix} a & u \\ c & v \end{bmatrix}\right).$$

(b) Was passiert im Fall $\det(A) = 0$?

Aufgabe 2. (**S**, 6 Punkte) Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ in $M_3(\mathbb{Q})$. Bestimmen Sie die Minimalgleichungen $\mu_A \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ und $\mu_B \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, die Eigenwerte von A und B, sowie alle zugehörige Eigenvektoren.

Aufgabe 3. (V) Sei K ein Körper.

(a) Seien $a, b \in K$ und $A := \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{bmatrix} \in M_2(K)$. Bestimmen Sie die Minimalgleichung μ_A.

(b) Finden Sie zwei Matrizen $A, B \in M_2(K)$, so dass die zugehörigen Minimalgleichungen gegeben sind durch $\mu_A(x) = x^2 = \mu_B(x)$ für alle $x \in K$.

(c) Sei nun $K = \mathbb{R}$. Geben Sie unendlich viele Matrizen $A \in M_2(\mathbb{R})$ an, so dass A jeweils keine Eigenwerte (in $\mathbb{R}$) besitzt.

Aufgabe 4. (**S**, 4 Punkte) Sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$. Sei $\mu_A \colon K \to K$ die Minimalgleichung für A; es gibt also ein $d \geq 1$ und $a_0, \ldots, a_{d-1} \in K$ mit $\mu_A(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ für alle $x \in K$. Zeigen Sie: A ist invertierbar genau dann, wenn $a_0 \neq 0$ gilt.

Aufgabe 5. (V) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq 2n} \in M_{2n}(\mathbb{Q})$ gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i + j \text{ gerade,} \\ 1 & \text{falls } i + j \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie A^2 und A^3. (Es mag hilfreich sein, zuerst die Fälle $n = 1, 2, 3$ zu betrachten.)

(b) Bestimmen Sie die Minimalgleichung $\mu_A \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ für A, sowie die Eigenwerte von A.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 11. und 12. Dezember in den Übungsgruppen.