7. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Aufgabe 1. (V) Sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Für jedes $b \in K^n$ ist das lineare Gleichungssystem mit erweiterter Matrix $[A \mid b]$ lösbar.
(b) Es gibt ein $b \in K^n$ so dass das lineare Gleichungssystem mit erweiterter Matrix $[A \mid b]$ eine eindeutige Lösung besitzt.
(c) Das homogene lineare Gleichungssystem mit Matrix A besitzt nur die Lösung 0_n.
(d) Für jedes $b \in K^n$ besitzt das lineare Gleichungssystem mit erweiterter Matrix $[A \mid b]$ eine eindeutige Lösung.
(e) A ist invertierbar.

Hinweis: Sie müssen nicht direkt zeigen, dass je zwei der obigen Aussagen äquivalent sind, was insgesamt $2\binom{5}{2} = 20$ Implikationen wären. Wenn Sie z.B. zeigen wollen, dass drei Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind, so genügt es, die drei Folgerungen „$(a) \Rightarrow (b)$“, „$(b) \Rightarrow (c)$“und „$(c) \Rightarrow (a)$“ zu beweisen.

Aufgabe 2. (**S**, 6 Punkte)

(a) Sei $K = \mathbb{Q}$. Sind die folgenden Matrizen invertierbar?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort. (Aufgabe 1 kann nützlich sein).
Wenn ja, so bestimmen Sie die inverse Matrix.

(b) Sei K ein Körper. Für welche $x \in K$ ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ invertierbar?

Aufgabe 3. (V) Sei K ein Körper und $A, B \in M_n(K)$. Zeigen Sie: Ist AB invertierbar, so sind auch A und B invertierbar.

Aufgabe 4. (V) Sei K ein Körper und $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ eine obere Dreiecksmatrix (siehe Aufgabe 5 auf Blatt 6). Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $a_{ii} \neq 0$ gilt für $1 \leq i \leq n$. Ist dies der Fall, so ist A^{-1} auch eine obere Dreiecksmatrix und die Einträge auf der Diagonalen von A^{-1} sind gegeben durch a_{ii}^{-1} für $1 \leq i \leq n$.

Aufgabe 5. (**S**, 6 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A_n \in M_n(\mathbb{Q})$ die obere Dreiecksmatrix

$$A_n := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & & & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & & n{-}1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n{-}2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nach Aufgabe 4 ist A_n invertierbar. Bestimmen Sie (mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren) die inverse Matrix A_n^{-1} für $n = 2, 3, 4$. Finden Sie eine allgemeine Formel für A_n^{-1} für alle $n \in \mathbb{N}$, und beweisen Sie diese.

Aufgabe 6. (Z) Sei $n \geq 1$ fest und $X := \{(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq i,j \leq n+1\}$. Wir bezeichnen mit $X^0 := \{(i,j) \in X \mid 1 \leq i,j \leq n\}$ die Menge der "inneren" Punkte von X und mit $\partial X := X \setminus X^\circ$ die Menge der "Randpunkte" von X. Es sei V die Menge aller Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$, welche folgende Eigenschaft besitzen:

$$(*) \qquad f(i,j) = \tfrac{1}{4}\big(f(i+1,j) + f(i-1,j) + f(i,j+1) + f(i,j-1)\big) \qquad \text{für alle } (i,j) \in X^\circ.$$

D.h., an jedem inneren Punkt von X ist der Wert von f gleich dem Durchschnitt der Werte von f auf den 4 Nachbarpunkten. (Veranschaulichen Sie sich X, X° und ∂X graphisch, etwa für $n = 3$.)

Zeigen Sie: Jede Funktion $f \in V$ ist eindeutig durch ihre Werte auf den Randpunkten von X bestimmt. Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor.

(i) Sei $f \in V$ und $M := \max\{f(i,j) \mid (i,j) \in X\}$. Zeigen Sie, dass es ein $(i,j) \in \partial X$ gibt mit $f(i,j) = M$. D.h., das Maximum von f wird auf dem Rand angenommen. Zeigen Sie eine analoge Aussage für das Minimum von f.

(ii) Zeigen Sie: Ist $f \in V$ und $f(i,j) = 0$ für alle $(i,j) \in \partial X$, so gilt $f(i,j) = 0$ für alle $(i,j) \in X$. D.h., die gewünschte Aussage gilt, wenn die Werte von f auf dem Rand alle gleich 0 sind.

(iii) Sei $f \in V$. Sei $x_{ij} := f(i,j)$ für $(i,j) \in X^\circ$ und $b_{ij} := f(i,j)$ für $(i,j) \in \partial X$. Die Werte b_{ij} seien vorgegeben. Wir wollen dann also zeigen, dass dadurch die Werte x_{ij} für $(i,j) \in X^\circ$ eindeutig bestimmt sind. Überlegen Sie sich dazu, dass wir mit Hilfe von $(*)$ ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit n^2 Gleichungen und n^2 Unbekannten $(x_{ij})_{(i,j)\in X^\circ}$ erhalten. Zeigen Sie mit Hilfe von (ii), dass dieses Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 4. und 5. Dezember in den Übungsgruppen.