6. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Aufgabe 1. (V) Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bringen Sie $A \in \mathbb{Q}^{5\times 6}$ mittels Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform.

(b) Ersetzen Sie jede Ziffer k in A durch $\bar{k}$ und fassen Sie damit A als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{F}_5$ auf. Bringen Sie dann $A \in (\mathbb{F}_5)^{5\times 6}$ mittels Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform.

(c) Ersetzen Sie jede Ziffer k in A durch $\bar{k}$ und fassen Sie damit A als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{F}_2$ auf. Bringen Sie dann $A \in (\mathbb{F}_2)^{5\times 6}$ mittels Gauß-Algorithmus in Zeilenstufenform.

Notieren Sie dabei in jedem Schritt, welche elementare Zeilenumformung Sie verwendet haben.

Aufgabe 2. (**S**, 9 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme über dem jeweils angegebenen Körper:

(a) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + z = 7 \\ x - 2y = 7 \\ x + y + z = 4 \\ \qquad \text{über } \mathbb{Q}. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -x + 6y + 18z = -3 \\ 2x - 2y - 6z = 1 \\ -2x + 2y + 6z = 2 \\ \qquad \text{über } \mathbb{C}. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \bar{2}x + \bar{3}y + \bar{4}z = \bar{5} \\ x + \bar{2}y + z = \bar{3} \\ \qquad \text{über } \mathbb{F}_7. \end{cases}$

Aufgabe 3. (**S**, 6 Punkte) Sei K ein Körper und $a \in K$ fest. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von a) die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$ax + y + z = 1, \qquad x + ay + z = 1, \qquad x + y + az = 1.$$

Aufgabe 4. (V) Sei K ein Körper. In der Vorlesung (Kap. 1, Def. 2.5) wurden elementare Zeilenumformungen eingeführt. Mit den dortigen Bezeichnungen erhalten wir also Abbildungen

$$\mathrm{Vert}_{ij} \colon K^{m\times n} \to K^{m\times n}, \qquad \mathrm{Mult}_i(c) \colon K^{m\times n} \to K^{m\times n}, \qquad \mathrm{Add}_{ij}(c) \colon K^{m\times n} \to K^{m\times n}.$$

Zeigen Sie, dass sich Vert_{ij} (also Vertauschen von 2 Zeilen) allein durch eine geeignete endliche Folge von (ingesamt vier) Operationen der Form $\mathrm{Mult}_i(c)$ und $\mathrm{Add}_{ij}(c)$ ausdrücken lässt, d.h., im Gauß-Verfahren könnte man auch ganz auf Vert_{ij} verzichten.

Aufgabe 5. (V) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ gilt für $1 \leq j < i \leq n$.

(a) Zeigen Sie: Sind $A, B \in M_n(K)$ obere Dreiecksmatrizen, so ist auch das Produkt $C := A \cdot B$ eine obere Dreiecksmatrix. Schreiben wir $C = [c_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$, so gilt $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$ für $1 \leq i \leq n$.

(b) Sei nun A eine obere Dreiecksmatrix mit $a_{ii} \neq 0$ für $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, dass für jedes $b \in K^n$ das lineare Gleichungssystem mit erweiterter Matrix $[A \mid b]$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 6. (V) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(R)$ und $1 < m < n$. Ziehen wir in A nach den ersten m Zeilen und den ersten m Spalten jeweils einen Trennstrich, so können wir uns A als aufgebaut aus 4 kleineren Matrizen vorstellen:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array}\right] \quad \text{mit} \quad B \in M_m(R),\ C \in R^{m \times (n-m)},\ D \in R^{(n-m) \times m},\ E \in M_{n-m}(R).$$

Zeigen Sie: Ist auch $A' \in M_n(R)$ nach obigem Schema in "Kästchen" aufgeteilt, mit analogen kleineren Matrizen B', C', D', E', so gilt

$$A \cdot A' = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} B' & C' \\ \hline D' & E' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} BB' + CD' & BC' + CE' \\ \hline DB' + ED' & DC' + EE' \end{array}\right],$$

d.h., man kann A und A' "kästchenweise" multiplizieren. Machen Sie sich dies explizit an einem Beispiel mit $n = 3$ und $m = 2$ klar.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 27. und 28. November in den Übungsgruppen.