5. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Aufgabe 1. (V) Sei R ein Ring mit 1. Seien $a, b \in R$ mit $a \cdot b = b \cdot a$. Zeigen Sie:

(a) $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$.

(b) $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)$.

Geben Sie dabei sorgfältig an, wo Sie die Ringaxiome und die Voraussetzung $a \cdot b = b \cdot a$ benutzen.

Aufgabe 2. (**S**, 4 Punkte) Sei R ein Ring mit 1. Seien $a, b \in R$ mit $a \cdot b = b \cdot a$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot c_n \text{ wobei } c_n := \sum_{i=0}^{n-1} a^i \cdot b^{n-1-i}.$$

Geben Sie dabei sorgfältig an, wo Sie die Ringaxiome und die Voraussetzung $a \cdot b = b \cdot a$ benutzen.

Aufgabe 3. (**S**, 4 Punkte) Bestimmen Sie die Additions- und Multiplikationstabelle für den Körper $\mathbb{F}_7$. Geben Sie für jedes $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ explizit ein $n' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ an mit $\bar{n}^{-1} = \bar{n}'$.

Aufgabe 4. (V) Alle Matrizen in dieser Aufgabe haben Einträge in $\mathbb{Q}$.

(a) Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 8 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

und $F = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie alle möglichen Produkte unter diesen Matrizen.

(b) Sei $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. Zeigen Sie:

(i) $M^2 - 3M + 2I_3 = O_{3\times 3}$.

(ii) M ist invertierbar. Berechnen Sie M^{-1}. (Hinweis: Benutzen Sie (i)).

Aufgabe 5. (**S**, 6 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $A = [a_{ij}] \in R^{m\times n}$. Definiere eine neue Matrix $A' = [a'_{ij}] \in R^{n\times m}$ durch $a'_{ij} := a_{ji}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$. Diese heißt die Transponierte von A und wird auch mit A^{tr} bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Für alle $c \in R$, $A, B \in R^{m\times n}$ und $C \in R^{n\times p}$ gilt

$$(A^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}} = A, \quad (cA)^{\mathrm{tr}} = cA^{\mathrm{tr}}, \quad (A + B)^{\mathrm{tr}} = A^{\mathrm{tr}} + B^{\mathrm{tr}} \quad \text{und} \quad (A \cdot C)^{\mathrm{tr}} = C^{\mathrm{tr}} \cdot A^{\mathrm{tr}}.$$

(b) Ist $m = n$ und A invertierbar, so ist auch A^{tr} invertierbar und es gilt $(A^{\mathrm{tr}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{tr}}$.

Aufgabe 6. (V) Zeigen Sie, dass die Menge der Matrizen

$$N := \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \qquad E := \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}, \qquad U := \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}, \qquad V := \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}$$

mit Einträgen in $\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ bezüglich der in der Vorlesung definierten Addition und Multiplikation einen Körper bildet. Dieser wird mit $\mathbb{F}_4 := \{N, E, U, V\}$ bezeichnet. Geben Sie die Additions- und Multiplikationstabelle für $\mathbb{F}_4$ an.

Bemerkung (dies brauchen Sie nicht zu zeigen): Man kann auch die komplexen Zahlen mit Hilfe von Matrizen konstruieren, nämlich als

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei man $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffasst, indem $x \in \mathbb{R}$ mit der Matrix $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \in \mathbb{C}$ identifiziert wird. Für welche Matrix $Z \in \mathbb{C}$ gilt $Z^2 = -I_2$ (wobei I_2 die Einheitsmatrix ist)?

Beachten Sie: Diese Konstruktion hat den Vorteil, dass man sich viel Arbeit beim Nachweis der Körperaxiome sparen kann, da wir ja bereits wissen, dass die 2×2-Matrizen einen Ring bilden.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 20. und 21. November in den Übungsgruppen.