4. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Aufgabe 1. (**S**, 6 Punkte) Seien A, B nicht-leere Mengen und $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Seien A_1, A_2 Teilmengen von A, sowie B_1, B_2 Teilmengen von B. Zeigen Sie:

(a) Aus $A_1 \subseteq A_2$ folgt auch $f(A_1) \subseteq f(A_2)$. Aus $B_1 \subseteq B_2$ folgt auch $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

(b) Es gilt $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ und $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Geben Sie ein Beispiel an, in dem $f(A_1 \cap A_2) \subsetneqq f(A_1) \cap f(A_2)$ gilt.

(c) Es gilt $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ und $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Aufgabe 2. (V) Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2 + 2x.$

(b) $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x-2 & \text{falls } x > 1, \\ -x & \text{falls } -1 \leq x \leq 1, \\ x+2 & \text{falls } x < -1. \end{cases}$

(c) $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (l, m, n) \mapsto 2^l 3^m 5^n.$

(d) $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (l, m, n) \mapsto 2^l 3^m 6^n.$

(e) $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad S \mapsto S \cup \{37\}.$

Aufgabe 3. (V) Seien A, B, C nicht-leere Mengen und $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

(a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
(b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.
(c) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.
(d) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.
(e) Ist f injektiv und g surjektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.

Aufgabe 4. (**S**, 6 Punkte)

(a) Seien A, B nicht-leere, abzählbar unendliche Mengen. Zeigen Sie, dass $A \times B$ abzählbar unendlich ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich ist.

Hinweis: Finden Sie eine surjektive Abbildung $g\colon A \to \mathbb{Q}$, wobei A eine Menge ist, von der Sie bereits wissen, dass sie abzählbar unendlich ist. Folgern Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

Aufgabe 5. (V)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine $(n+1)$-elementige Teilmenge von $\{1, 2 \ldots, 2n\}$.
Zeigen Sie: Es gibt $a, b \in A$ mit a ungerade und $b = a + 1$.

Hinweis: Sei $B := \{\{1,2\},\ \{3,4\},\ \ldots,\ \{2n-1, 2n\}\}$. (Dies ist also eine Teilmenge der Potenzmenge von $\{1, 2 \ldots, 2n\}$.) Gibt es eine injektive Abbildung $f\colon A \to B$? Betrachten Sie dann konkret die Abbildung $f\colon A \to B$ mit $f(a) = \begin{cases} \{a, a+1\} & \text{falls } a \text{ ungerade,} \\ \{a-1, a\} & \text{falls } a \text{ gerade.} \end{cases}$

(b) Zeigen Sie: In jeder 101-elementigen Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, 200\}$ gibt es zwei Zahlen, so dass die eine die andere teilt.

Bemerkung: Dies sind Beispiele für das sogenannte *Schubfachprinzip* (oder *pigeon hole principle* auf Englisch). Allgemein besagt es: Sind n Objekte gegeben, die man auf m Schubladen verteilen möchte, wobei $n > m$ ist, so landen in einer Schublade mindestens zwei dieser Objekte. Wenn sich zum Beispiel 13 Leute treffen, so haben mindestens 2 von ihnen im gleichen Monat Geburtstag. Man braucht allerdings manchmal etwas Geschick, um in einem gegebenen Problem die Objekte und Schubladen richtig zu definieren, so dass man das Prinzip anwenden kann. In (a) würde man z.B. als Objekte die Elemente von A nehmen, und als Schubladen die Elemente von B.

Aufgabe 6. (Z) In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar unendlich ist. Zeigen Sie nun, dass die Menge aller *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist.

Hinweis: Suchen Sie im Internet nach „set of finite subsets of N“; Sie werden viele Ideen dazu finden (auch manche falsche). Suchen Sie sich eine aus, die korrekt ist und Ihnen am besten gefällt, und schreiben Sie das Argument sorgfältig auf.

Aufgabe 7. (Z) Diese Aufgabe ist wiederum dem Buch von Martin Liebeck “A concise introduction to pure mathematics” entnommen. Der Filmkritiker Ivor Smallbrain hat sich mit seiner Rivalin Greta Picture versöhnt und sie sind nun Freunde. Beide nehmen an einer Vorführung des Films 101 Equivalence Relations teil. Sie haben genug von dem Film und fangen an zu diskutieren, wieviele verschiedene Äquivalenzrelationen es auf der Menge $\{1, 2\}$ gibt. Sie finden nur zwei. Auf der Menge $\{1, 2, 3\}$ finden sie nur fünf verschiedene Äquivalenzrelationen. Haben sie alle Äquivalenzrelationen auf diesen Mengen gefunden? Wie viele sollten sie auf den Mengen $\{1, 2, 3, 4\}$ und $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ finden? Wie viele sollten sie auf einer n-elementigen Menge finden?

Hinweis: Ist R eine Äquivalenzrelation auf einer endlichen Menge A, so erhält man eine disjunkte Vereinigung $A = A_1 \cup \ldots \cup A_r$, wobei $A_1, \ldots, A_r$ die Äquivalenzklassen bzgl. R sind. Überlegen Sie sich umgekehrt, dass jede Zerlegung von A als disjunkte Vereinigung von Teilmengen eine Äquivalenzrelation definiert. (Siehe auch `https://math.stackexchange.com/questions/322738/`)

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 13. und 14. November in den Übungsgruppen.