3. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Aufgabe 1. (**S**, 9 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

(a) Sei $a \in \mathbb{N}$ mit $a \geq 2$; für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere die Fermatzahl $F_n := a^{2^n} + 1$.
Dann gilt $F_n - 2 = (a-1)\, F_0\, F_1 \ldots F_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $(2n)!\,(n+1) > 4^n (n!)^2$.
Dabei ist $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ die Fakultät von n. Als Konvention setzen wir auch $0! := 1$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\dfrac{(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n}{2} \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Sei $a_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$. Finden Sie zuerst eine rekursive Formel, mit der man a_{n+1} aus a_n und a_{n-1} berechnet, für $n \geq 2$.

Aufgabe 2. (**S**, 3 Punkte) Sei $R := \{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n^2 = m^2\}$.

(a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von 0, von 1 und von -37.

(c) Geben Sie zwei verschiedene Repräsentantensysteme der Äquivalenzklassen an.
Bemerkung: So kann man sehen, dass ein Repräsentantensystem nicht eindeutig sein muss.

Aufgabe 3. (**S**, 3 Punkte) Zeigen Sie die Aussage in Beispiel 5.3(d) der Vorlesung:

Die Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ (k,n) \mapsto 2^k(2n+1) - 1$, ist bijektiv.

Aufgabe 4. (Z) Wie in Beispiel 4.9 der Vorlesung sei $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Betrachte folgende Relation:

$$R := \big\{\big((n,m),(n',m')\big) \in A \times A \mid nm' = n'm\big\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Ein Paar $(n,m) \in A$ heißt gekürzt, wenn es keine natürliche Zahl $k > 1$ mit $k \mid n$ und $k \mid m$ gibt. Zeigen Sie, dass jede Äquivalenzklasse von R ein gekürztes Paar enthält.
Hinweis: Siehe Beweis von Lemma 2.6.

(c) Zeigen Sie, dass $B := \{(n,m) \in A \mid (n,m) \text{ ist gekürzt}\}$ ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen ist.

Aufgabe 5. (V) Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(a) Seien $a,b \in \mathbb{Z}$ und $m,n \in \mathbb{N}$ mit $n \mid m$ und $a \equiv b \mod m$. Dann gilt $a \equiv b \mod n$.

(b) Sei p eine Primzahl und sei $x \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 \equiv x \mod p$. Dann gilt $x \equiv 0 \mod p$.

(c) $(1-2n)^2 \equiv (4n+1)^{10} \mod 4n$, für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(d) Seien $a,b,c,n \in \mathbb{N}$ mit $ac \equiv bc \mod n$. Dann gilt $a \equiv b \mod n$.

Aufgabe 6. (V) Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ definieren wir $\beta(n,k) := \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \in \mathbb{Q}$.

Es gilt also z.B. $\beta(n,0) = \beta(n,n) = 1$ für alle $n \geq 0$.

(a) Zeigen Sie: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n-1$ gilt $\beta(n,k) = \beta(n-1,k-1) + \beta(n-1,k)$. Schließen Sie daraus mit vollständiger Induktion, dass $\beta(n,k) \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Sei $A := \{(n,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid k \leq n\}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Ist $f\colon A \to \mathbb{Q}$ eine beliebige Abbildung mit

- $f(n,0) = f(n,n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und
- $f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-1,k)$ für alle $(n,k) \in A$ mit $1 \leq k \leq n-1$,

so gilt $f(n,k) = \beta(n,k)$ für alle $(n,k) \in A$.

Überlegen Sie sich sorgfältig, wie Sie den Induktionsbeweis organisieren.

Aufgabe 7. (Z) Diese Aufgabe ist dem Buch von Martin Liebeck "A concise introduction to pure mathematics" entnommen (wobei die Formulierungen der Übersetzung gegenüber dem englischen Original etwas entschärft sind). Der Filmkritiker Ivor Smallbrain wurde wegen einer rufschädigenden Kritik verurteilt und sitzt nun im Gefängnis. In seiner Langeweile träumt er, dass er am Strand auf der Pazifischen Insel Neferiti liegt und Kokosnüsse isst. In seinem Traum kommt plötzlich der König von Neferiti auf ihn zu und sagt "Du wirst begnadigt, wenn Du folgendes Rätsel lösen kannst: Gibt es ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a^6 = b^5 + 16$?" Fieberhaft arbeitet Igor an einer Lösung und sagt schließlich "Oh mein König, nein die gibt es nicht." Der König glaubt das nicht und ordnet sogar an, dass Ivors Strafe verlängert wird. — Da wacht Ivor vor Schrecken auf und fragt sich, ob seine Antwort wirklich richtig war. War sie das nun oder nicht?

Hinweis: Sie werden ggT's und den Hauptsatz der elementaren Arithmetik benötigen. Können Sie ähnliche Aufgaben mit anderen Potenzen von a und b formulieren?

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 6. und 7. November in den Übungsgruppen.