2. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Aufgabe 1. (**S**, 6 Punkte) Seien P und Q Aussagen.

(a) Zeigen sie mit Hilfe der entsprechenden Wahrheitstabelle, dass die folgende Verknüpfung immer wahr ist:

$$\big(((\neg P) \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \Rightarrow (\neg Q))\big) \Rightarrow P.$$

(Bemerkung: Diese bildet die Grundlage des Widerspruchsbeweises. Wir wollen zeigen, dass P wahr ist. Nehmen wir an, dass P falsch ist, und betrachten eine weitere Aussage Q. Wenn wir dann sowohl Q als auch $\neg Q$ als wahr herleiten können, haben wir einen Widerspruch produziert. Also war die Annahme falsch, d.h., P ist wahr.)

(b) Wir definieren eine neue Verknüpfung durch $P \clubsuit Q := (\neg P) \vee (\neg Q)$. Zeigen Sie, dass man all unsere anderen Verknüpfungen (also $\neg P$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \Rightarrow Q$) auf äquivalente Weise allein mit "$\clubsuit$" ausdrücken kann. (Zum Beispiel ist $\neg P$ äquivalent zu $P \clubsuit P$.)

Aufgabe 2. (V) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

(c) Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \neq y$ ist $x - y$ ein Teiler von $x^n - y^n$.
Hinweis: $x^{n+1} - y^{n+1} = x^{n+1} - xy^n + xy^n - y^{n+1}$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt $2^n > n^2$.

(e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} < \dfrac{3}{4}$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{n}$.

(f) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 5 ein Teiler von $2^{3n} - 3^n$.

Aufgabe 3. (**S**, 6 Punkte) Gegeben seien $n, m \in \mathbb{N}$. Betrachte die Menge

$$A := \{d \in \mathbb{N} \mid \exists\, a, b \in \mathbb{Z} : \ d = an + bm\}.$$

Offenbar ist $A \neq \varnothing$ (zum Beispiel: für $a = b = 1$ ist $1 \cdot n + 1 \cdot m \in \mathbb{N}$, also $n + m \in A$). Also gibt es ein kleinstes Element $d_0 \in A$; dazu gibt es $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ mit $d_0 = a_0 n + b_0 m$. Zeigen Sie:

(a) Ist $d \in \mathbb{N}$ ein gemeinsamer Teiler von n und m (d.h., es gilt $d \mid n$ und $d \mid m$), so folgt $d \mid d_0$, und damit auch $d \leq d_0$.

(b) d_0 selbst ist ein gemeinsamer Teiler von n und m.
(*Hinweis:* Nehmen Sie an, es gilt $d_0 \nmid n$ und teilen Sie dann n mit Rest durch d_0; es gilt also $n = qd_0 + r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$ und $0 < r < d_0$. Ist $r \in A$?)

Bemerkung. Damit ist gezeigt, dass d_0 der grösste gemeinsame Teiler von n und m ist; Bezeichnung $d_0 = \mathrm{ggT}(n, m)$. Außerdem erhalten wir die Darstellung $d_0 = r_0 n + b_0 m$ mit $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$, was auch als Lemma von Bezout bezeichnet wird (nach Étienne Bézout, 1730–1783).

(c) Bestimmen Sie d_0, a_0, b_0 für $n = 17$, $m = 29$ sowie für $n = 345$, $m = 299$.
(*Hinweis:* Machen Sie sich klar, dass man mit obigem Beweis einen Algorithmus formulieren kann: man fängt an mit irgendeinem Element $d \in A$, z.B., $d = n + m$. Ist $d \nmid n$ oder $d \nmid m$, so dividiert man mit Rest durch d und erhält ein echt kleineres Element in A. Dann fährt man fort mit diesem Element usw.; siehe auch `https://de.wikipedia.org/wiki/Euklidischer_Algorithmus`)

Aufgabe 4. (V) Jedes Jahr gibt es eine bestimmte Anzahl von gesetzlichen Feiertagen (die teilweise vom Bundesland abhängen). Einige davon fallen immer auf das gleiche Datum (Beispiel: 1. Mai), bei anderen wechselt das Datum. Ein Beispiel für Letzteres ist das Osterdatum, also das Datum des Ostersonntags. Dazu gibt es eine lange Geschichte (siehe etwa den entsprechenden wikipedia-Artikel), und tatsächlich haben sich Mathematiker darum bemüht, Formeln für die Berechnung des Osterdatums aufzustellen: dabei geht wesentlich der "mod" Operator ein!

Schauen Sie sich die Gaußsche Osterformel an, siehe

`https://de.wikipedia.org/wiki/Gaußsche_Osterformel`

und berechnen Sie damit das Osterdatum für Ihr Geburtsjahr.

Aufgabe 5. (V) Wir zeigen mit vollständiger Induktion: *Alle natürlichen Zahlen sind gleich.*

Beweis. Für $a, b \in \mathbb{N}$ definieren wir dazu $\max(a, b)$ als das Maximum von a, b. (Zum Beispiel ist $\max(2, 5) = 5$ und $\max(3, 3) = 3$.) Seien nun $a, b \in \mathbb{N}$. Wir zeigen $a = b$ mit Induktion nach $n = \max(a, b)$. Induktionsanfang: Ist $n = \max(a, b) = 1$, so folgt $a = b = 1$, also gilt die Behauptung. Nun zum Induktionsschritt. Sei $n \geq 1$ und angenommen, die Behauptung gilt für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $n = \max(a, b)$. Seien nun $a', b' \in \mathbb{N}$ mit $\max(a', b') = n + 1$. Dann ist $\max(a' - 1, b' - 1) = n$, also nach Induktionsannahme $a' - 1 = b' - 1$ und damit auch $a' = b'$. $\square$

Die Aussage ist offenbar nicht richtig, aber wo liegt der Fehler im obigen Beweis?

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 30. und 31. Oktober in den Übungsgruppen.