15. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

—Ferienübung—

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Aufgabe 1. Zur Erinnerung (Kapitel 1, §4): Sei $A \in M_n(K)$. Dann gibt es ein $d \in \mathbb{N}$ mit $A^d + a_{d-1}A^{d-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0_{n\times n}$, wobei $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1} \in K$. Sei nun $d \in \mathbb{N}$ minimal mit dieser Eigenschaft. Dann sind die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1} \in K$ eindeutig bestimmt, und wir definieren das Minimalpolynom von A als

$$\tilde{\mu}_A = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{d-1}X^{d-1} + X^d \in K[X].$$

(a) Zeigen Sie, dass $\tilde{\mu}_A = \tilde{\mu}_{A^{\mathrm{tr}}}$ gilt (wobei A^{tr} die transponierte Matrix ist).

(b) Sei $T \in M_n(K)$ invertierbar und $B := T^{-1}AT$. Zeigen Sie, dass dann $B^m = T^{-1}A^m T$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt. Schließen Sie damit, dass $\tilde{\mu}_A = \tilde{\mu}_B$ gilt.

Aufgabe 2. Seien V, W endlich-erzeugte K-Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann definieren wir den Rang von φ als $\mathrm{Rang}(\varphi) := \dim \mathrm{Bild}(\varphi)$.

Zeigen Sie: Sei $n = \dim V \geq 1$ und $m = \dim W \geq 1$. Sei B eine Basis von V und C eine Basis von W. Dann gilt $\mathrm{Rang}(\varphi) = \mathrm{Rang}(A)$, wobei $A := M_C^B(\varphi) \in K^{m\times n}$ und der Rang von Matrizen wie in Kapitel 3, §1 definiert wird.

Aufgabe 3. (a) Sei A eine nicht-leere Menge und $B := \mathrm{Abb}(A, A)$. Durch die Hintereinanderausführung von Abbildungen wird dann eine Verknüpfung $\circ\colon B \times B \to B$, $(f, g) \mapsto f \circ g$ definiert. Zeigen Sie, dass diese Verknüpfung assoziativ ist und es ein neutrales Element $e \in B$ gibt.

(b) Sei nun $A = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{Q})$. Ist $\alpha \in A$ und setzen wir $a_n := \alpha(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so ist α die unendliche Folge $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Seien $f\colon A \to A$ und $g\colon A \to A$ gegeben durch

$$f\colon (a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (0, a_0, a_1, a_2, \ldots), \qquad g\colon (a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

Zeigen Sie, dass $g \circ f = e$ und $f \circ g \neq e$ gilt. D.h., g ist kein Inverses zu f im Sinne von Kapitel 0, Def. 7.1.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sind $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$ gegeben, so definieren wir eine $n \times n$ Matrix durch

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in M_n(K).$$

Diese Matrix heißt Frobenius-Matrix oder auch Begleitmatrix zu den Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Ist, wie üblich, $e_i \in K^n$ der i-te Einheitsvektor, so gilt also $Ae_i = e_{i+1}$ für $1 \le i \le n-1$, und $Ae_n = -a_0e_1 - a_1e_2 - \ldots - a_{n-1}e_n$.

(a) Schließen Sie mit obigen Formeln für Ae_i, dass der Minimalgrad von A mindestens n ist und dass $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1A + a_0I_n = 0_n$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von A gegeben ist durch

$$\tilde{\mu}_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in K[X].$$

Aufgabe 5. Sei K ein Körper und $A \in K^{m\times n}$. Eine Matrix $B \in K^{n\times m}$ heißt Pseudo-Inverse von A, wenn $ABA = A$ und $BAB = B$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Ist $m = n$ und A invertierbar, so ist A^{-1} das eindeutig bestimmte Pseudo-Inverse von A.

(b) Bestimmen Sie alle Pseudo-Inversen der Null-Matrix $0_{m\times n}$.

(c) Sei nun $b \in K^m$ und $L := \{x \in K^n \mid Ax = b\}$. Sei $B \in K^{n\times m}$ ein Pseudo-Inverses von A. Zeigen Sie, dass L genau dann nicht leer ist, wenn $Bb \in L$ gilt.

(d) Sei $K = \mathbb{Q}$ und $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Da eine Zeile von A nur aus Nullen besteht, ist A sicher nicht invertierbar. Zeigen Sie, dass $B := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ein Pseudo-Inverses von A ist, es aber noch weitere Pseudo-Inverse zu A gibt.

(e) Eine Pseudo-Inverse $B \in K^{n\times m}$ von A heißt Moore–Penrose–Inverses, wenn AB und BA symmetrische Matrizen sind. Zeigen Sie, dass ein Moore–Penrose–Inverses (wenn es existiert) eindeutig bestimmt ist.

Bemerkung. In LAAG2 werden wir sehen, dass für $K = \mathbb{R}$ jede Matrix ein Moore–Penrose–Inverses besitzt.

Diese Aufgaben werden in den ersten Übungen des Sommersemesters besprochen.