14. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Aufgabe 1. (V) Gegeben sei die folgende Menge von Vektoren in $V = \mathbb{Q}^3$:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\};$$

außerdem seien die folgenden Mengen von Vektoren in $W = \mathbb{Q}^2$ gegeben:

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad C' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \right\}.$$

Sei nun $\varphi \colon V \to W$ die lineare Abbildung mit

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} 2y + 3z \\ x - 2y \end{bmatrix} \qquad \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

(a) Zeigen Sie, dass B eine Basis von V ist, und B', C' Basen von W sind.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M^B_{B'}(\varphi) \in \mathbb{Q}^{2\times 3}$ sowie die Basiswechselmatrix $T = M^{B'}_{C'}(\mathrm{id}_W)$.

(c) Sei $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in V$. Bestimmen Sie $M_B(v)$ sowie $M_{B'}(\varphi(v))$ und $M_{C'}(\varphi(v))$.

Aufgabe 2. (V) Sei $A \in M_n(K)$ und $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ die Basis der Einheitsvektoren von $V = K^n$. Sei $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine weitere Basis von V, so dass jedes v_i ein Eigenvektor von A ist, d.h., es gilt $Av_i = \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \in K$. (Beachte, dass die λ_i nicht alle verschieden sein müssen.) Sei $T = M^C_B(\mathrm{id}_V)$.

(a) Erklären Sie, warum $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. In diesem Fall heißt A *diagonalisierbar*.

(b) Prüfen Sie, welche der Matrizen in Aufgabe 4 und 5 (Blatt 13) diagonalisierbar sind, und geben Sie dann jeweils T an.

Aufgabe 3. (V) Sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$. Es gebe ein $m \geq 1$ mit $A^m = 0_{n\times n}$; eine solche Matrix heißt **nilpotent**.

(a) Zeigen Sie, dass $I_n - A$ invertierbar ist und es gilt $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{m-1}$.
(b) Zeigen Sie, dass 0 der einzige Eigenwert von A ist.

Aufgabe 4. (V) Sei K ein Körper und betrachte den Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, K)$. Jedes $f \in V$ ist also eine Folge $f = (a_n)_{n\geq 0}$ (oder einfach (a_n)), wobei $a_n = f(n)$ für alle $n \geq 0$. Addition und Skalarmultiplikation sind (wie üblich) gegeben durch:

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n) \qquad \text{und} \qquad s(a_n) := (sa_n) \quad (\text{für } s \in K).$$

Für $f = (a_n) \in V$ und $g = (b_n) \in V$ definiere nun $f * g := (c_n) \in V$ wobei

$$c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \qquad \text{für alle } n \geq 0.$$

Diese Verknüpfung heißt **Konvolution** oder auch **Cauchy-Produkt** (wie in der Analysis). Zeigen Sie, dass $*\colon V \times V \to V$ assoziativ und kommutativ ist. Gibt es dazu ein neutrales Element?

Zusatzaufgabe. (**S**, $16 = 2 + 4 + 4 + 6$ Bonuspunkte) Sei $K = \mathbb{R}$. Wir betrachten die folgenden linearen Abbildungen:

$$\varphi_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ x - 2y \end{bmatrix}, \qquad \varphi_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x \\ x - y \\ x + y \end{bmatrix}$$

$$\varphi_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x + y \\ y + z \end{bmatrix}, \qquad \varphi_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} z \\ y - x \\ x + z \end{bmatrix}.$$

Gegeben seien die Standardbasen $B = \{e_1, e_2\}$ und $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ (jeweils bestehend aus den Einheitsvektoren). Außerdem seien die folgenden Mengen von Vektoren gegeben:

$$C := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad C' := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

(a) Zeigen Sie, dass C eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und C' eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
(b) Bestimmen Sie die Basiswechelmatrizen $M_B^C(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ und $M_{B'}^{C'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ sowie deren Inverse.
(c) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $M_C^B(\varphi_1)$, $M_{B'}^C(\varphi_2)$, $M_B^{C'}(\varphi_3)$ und $M_{C'}^{B'}(\varphi_4)$.
(d) Bestimmen Sie die Minimalgleichungen für $M_B^B(\varphi_1)$ und $M_{B'}^{B'}(\varphi_4)$, sowie die Eigenwerte dieser beiden Matrizen.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 5. und 6. Februar in den Übungsgruppen.