# 13. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

**Aufgabe 1.** (V) Seien $V, W$ Vektorräume über dem Körper $K$. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ so dass das Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ l.u. ist. Zeigen Sie: Ist $\varphi$ injektiv, so ist auch das Tupel $(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$ l.u.

(b) Kann es sein, dass $\dim V = 5$ und $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi)$ gilt?

(c) Kann es sein, dass $\dim V = 4$, $\dim W = 2$ und $\dim \mathrm{Kern}(\varphi) = 1$ gilt?

(d) Sei $U$ ein weiterer $K$-Vektorraum und $\psi\colon U \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch die Hintereinanderaufführung $\varphi \circ \psi\colon U \to W$ eine lineare Abbildung ist. Zeigen Sie:

$$\varphi \circ \psi = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Bild}(\psi) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi).$$

**Aufgabe 2.** (V) Sei $U$ der von $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ erzeugte Teilraum von $V = \mathbb{Q}^3$.

(a) Ergänzen Sie $\{v_1\}$ zu einer Basis von $V$.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in M_3(\mathbb{Q})$ mit $U = N(A) := \{x \in \mathbb{Q}^3 \mid Ax = 0_3\}$. (Eine solche Matrix gibt es nach Kapitel 3, Beispiel 2.4.)

(c) Begründen Sie, ohne Matrixrechnung, warum $\mathrm{Rang}(A) = 2$ gilt. Bestimmen Sie nun auch eine $2 \times 3$-Matrix $A'$ mit $U = N(A')$.

**Aufgabe 3.** (**S**, 4 Punkte) Sei $K$ ein Körper und $V$ ein endlich erzeugter $K$-Vektorraum. Sei $r \geq 2$ und seien $U_1, \ldots, U_r$ Teilräume von $V$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion nach $r$:

$$\dim(U_1 \times \ldots \times U_r) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_r \geq \dim(U_1 + \ldots + U_r).$$

**Aufgabe 4.** (**S**, 15 Punkte) Sei $K$ ein Körper und $A \in M_n(K)$. Zur Erinnerung (siehe Kapitel 1, §4): Ein Element $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von $A$, wenn es ein $v \in K^n$ gibt mit $Av = \lambda v$ und $v \neq 0_n$. In diesem Fall definieren wir $E_A(\lambda) := \{x \in K^n \mid (A - \lambda I_n)x = 0_n\}$ als den zu $\lambda$ gehörigen Eigenraum.

Sei nun $A$ eine der folgenden Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sei $K = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte der obigen Matrizen. Bestimmen Sie dann jeweils Basen der zugehörigen Eigenräume.

**Aufgabe 5.** (V) Ersetzen Sie jede Ziffer $k$ in $A$ von Aufgabe 4 durch $\bar{k}$ und fassen Sie damit $A$ als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{F}_2$ auf. Bestimmen Sie dann jeweils wieder alle Eigenwerte und Basen für die zugehörigen Eigenräume.

**Aufgabe 6.** (V) Sei $K$ ein Körper und $A = [a_{ij}] \in K^{m \times n}$. Zeigen Sie: Genau dann gilt $\mathrm{Rang}(A) \leq 1$, wenn es zwei Tupel $(x_1, \ldots, x_m)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ mit Elementen aus $K$ gibt, so dass $a_{ij} = x_i y_j$ für alle $i, j$ gilt.

**Aufgabe 7.** (Z) Sei $K$ ein Körper. Seien $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times k}$. Zeigen Sie die sogenannte Sylvester-Ungleichung $\mathrm{Rang}(AB) \geq \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(B) - n$.

Hinweis: Wenn Sie nicht weiter wissen, suchen Sie im Internet nach Sylvester's rank inequality. (Hilfreich sind sehr oft die Seiten bei `math.stackexchange` oder `MathOverflow`.)

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** 29. und 30. Januar in den Übungsgruppen.