12. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Aufgabe 1. (**S**, 5 Punkte) Sei $K = \mathbb{Q}$ und $V = P_3(\mathbb{Q})$ Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3. Gegeben seien die Teilräume

$$U_1 := \{f \in V \mid f(1) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 := \langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbb{Q}},$$

wobei $f_1(x) = x^2 + 1$ und $f_2(x) = x^3 + 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie jeweils die Dimension von

$$U_1, \quad U_2, \quad U_1 \cap U_2 \text{ und } U_1 + U_2$$

und geben Sie für jeden Raum eine Basis an. Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2. (**S**, 4 Punkte) Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Sei B eine Basis von V und C eine Basis von W. Nach Kapitel 2, §1, ist auch das direkte Produkt $V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$ ein K-Vekorraum. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{(v, 0_W) \mid v \in B\} \cup \{(0_V, w) \mid w \in C\}$$

eine Basis von $V \times W$ ist.

Bemerkung: Insbesondere ist also $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W < \infty$, wenn V und W endlich erzeugt sind.

Aufgabe 3. (V) Sei K ein Körper und $n \geq 1$. Gegeben seien $f_0, \ldots, f_n \in P_n(K)$ mit $f_j(2) = 0$ für alle $j \in \{0, ..., n\}$. Zeigen Sie, dass das Tupel $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ linear abhängig ist.

Aufgabe 4. (**S**, 6 Punkte) Entscheiden Sie, welche der folgenden Abbildungen linear über $K = \mathbb{R}$ sind. Bestimmen Sie im Fall einer linearen Abbildung jeweils Basen für den Kern und das Bild von f.

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^2 + 1 \\ x + y + z \end{bmatrix}$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}$

(c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto 2x - y + z$

(d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$

Aufgabe 5. (V) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Zeigen Sie:

(a) Für $v \in V$ ist $v - \varphi(v) \in \mathrm{Kern}(\varphi)$.

(b) Es gilt $V = \mathrm{Kern}(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi)$

Aufgabe 6. (Z) Sei V ein K-Vektorraum, der nicht endlich erzeugt (e.e.) ist, aber es gebe zumindest eine abzählbare Teilmenge $S \subseteq V$ mit $V = \langle S \rangle_K$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass V auch in diesem Fall eine Basis B mit $B \subseteq S$ besitzt, ohne das Auswahlaxiom zu benutzen.

Sei dazu $f\colon \mathbb{N}_0 \to S$ eine bijektive Abbildung und schreibe $v_n = f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Überlegen Sie, warum $S \neq \{0_V\}$ und $\langle v_0, v_1, \ldots, v_m \rangle_K \subsetneqq V$ für alle $m \geq 0$ gilt.

Wir können dann rekursiv eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von natürlichen Zahlen wie folgt definieren:

Sei $a_0 := \min\{i \in \mathbb{N}_0 \mid v_i \neq 0_V\}$ und $a_{n+1} := \min\{i \in \mathbb{N}_0 \mid v_i \notin \langle v_0, v_1, \ldots, v_{a_n} \rangle_K\}$ für $n \geq 0$.

Zeigen Sie, dass $B := \{v_{a_n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Basis von V ist.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 22. und 23. Januar in den Übungsgruppen.