11. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Aufgabe 1. (V) Gegeben seien die folgenden Spaltenvektoren in $V = \mathbb{Q}^4$:

$$u_1 := \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}, \qquad u_2 := \begin{bmatrix}3\\4\\2\\1\end{bmatrix}, \qquad u_3 := \begin{bmatrix}5\\8\\3\\0\end{bmatrix}, \qquad v := \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad w := \begin{bmatrix}4\\4\\3\\3\end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie, ob die Tupel (u_1, u_2, u_3) und (v, w) jeweils linear unabhängig sind in V. Ist (u_1, u_2, u_3, v, w) linear unabhängig?

(b) Wir betrachen die Teilräume $U_1 := \langle u_1, u_2, u_3\rangle_{\mathbb{Q}}$ und $U_2 := \langle v, w\rangle_{\mathbb{Q}}$ von V. Bestimmen Sie endliche Teilmengen $S, T \subseteq V$, mit möglichst wenig Elementen, so dass $U_1 + U_2 = \langle S\rangle_{\mathbb{Q}}$ und $U_1 \cap U_2 = \langle T\rangle_{\mathbb{Q}}$ gilt.

Aufgabe 2. (V) Gegeben seien die folgenden Spaltenvektoren in $V = \mathbb{R}^2$:

$$u_1 := \begin{bmatrix}3+\sqrt{2}\\1+\sqrt{2}\end{bmatrix}, \qquad u_2 := \begin{bmatrix}7\\1+2\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Tupel (u_1, u_2) linear abhängig in V ist.

(b) Wegen $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ können wir V auch als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auffassen. (D.h., die Spaltenvektoren in $V = \mathbb{R}^2$ werden wie üblich addiert, aber die Skalarmultiplikation wird auf Skalare in $\mathbb{Q}$ eingeschränkt.) Zeigen Sie, dass dann das Tupel (u_1, u_2) linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 3. (**S**, 5 Punkte) Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Gegeben seien $f_1, f_2, f_3 \in V$ mit:

$$f_1(x) := \sin(\pi x), \qquad f_2(x) := |x-1|, \qquad f_3(x) := 2x^2 - 5$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, ob das Tupel (f_1, f_2, f_3) linear unabhängig ist oder nicht. Sei $g \in V$ definiert durch $g(x) := -x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Gilt $g \in \langle f_1, f_2, f_3\rangle_{\mathbb{R}}$?

Hinweis: Siehe Kapitel 2, Beispiel 2.12.

Aufgabe 4. (V) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

(a) Gegeben sei ein linear unabhängiges Tupel (v_1, v_2, v_3) in V. Bestimmen Sie alle $c \in K$, so dass das Tupel $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + cv_3)$ l.u. (linear unabhängig) ist.

(b) Gegeben seien ein linear unabhängiges Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ in V und ein Vektor $v \in V$ mit $v \notin \langle v_1, \ldots, v_n\rangle_K$. Zeigen Sie, dass das Tupel $(v_1 + v, v_2 + v, \ldots, v_n + v)$ l.u. ist.

(c) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $A \in M_n(K)$. Für $1 \leq i \leq n$ definiere $w_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \in V$. Zeigen Sie:

$$(w_1, \ldots, w_n) \text{ l.u.} \quad \Leftrightarrow \quad (v_1, \ldots, v_n) \text{ l.u. und } A \text{ invertierbar.}$$

Aufgabe 5. (**S**, 6 Punkte) Sei K ein Körper, $n \geq 1$ und $P_n(K)$ der Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$.

(a) Gegeben seien $n+1$ paarweise verschiedene Elemente $x_0, x_1, \ldots, x_n \in K$, sowie beliebige Elemente $y_0, y_1, \ldots y_n \in K$. Zeigen Sie, dass es genau ein $f \in P_n(K)$ gibt mit $f(x_i) = y_i$ für $0 \leq i \leq n$. Hinweis: Vandermonde-Matrix.

(b) Sei $\mathbb{F}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ Körper mit 5 Elementen. Bestimmen Sie die eindeutige Funktion $f \in P_4(\mathbb{F}_5)$ mit $f(\overline{1}) = \overline{0}$ und $f(x) = \overline{1}$ für alle $x \in \mathbb{F}_5$, $x \neq \overline{1}$.

(c) Sei $f \in \hat{P}_n(K)$. Es gebe n paarweise verschiedene Elemente $c_1, \ldots, c_n \in K$ mit $f(c_i) = 0$ für $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, dass es ein $0 \neq a \in K$ gibt mit $f(x) = a(x - c_1) \cdots (x - c_n)$ für alle $x \in K$. Hinweis: Horner-Schema und Induktion nach n.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 15. und 16. Januar in den Übungsgruppen.