10. Übung zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli, Dr. I. Paul

WiSe 2018/19

Aufgabe 1. (**S**, 6 Punkte) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Für $v, w \in V$ mit $v \neq 0$ und $w \neq 0$ schreiben wir $v \sim w$, wenn es ein $0 \neq s \in K$ gibt mit $v = sw$. Dies definiert eine Relation auf $V \setminus \{0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Für $0 \neq v \in V$ werde die Äquivalenzklasse von v mit $\overline{v}$ bezeichnet; dann ist $\overline{v} = \{sv \mid 0 \neq s \in K\}$. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit $\mathbb{P}(V)$ bezeichnet; diese Menge heißt der projektive Raum über V. Es ist also $\mathbb{P}(V) = \{\overline{v} \mid 0 \neq v \in V\}$.

(b) Sei $V = K^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie für $n = 2, 3$ ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$.

(c) Sei p eine Primzahl und $K = \mathbb{F}_p$ der endliche Körper mit p Elementen. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|\mathbb{P}(\mathbb{F}_p^n)| = \dfrac{p^n - 1}{p - 1} = p^{n-1} + \ldots + p + 1$.

Aufgabe 2. (**S**, 4 Punkte) Gegeben seien die folgenden Spaltenvektoren in $V = \mathbb{Q}^4$:

$$u_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad u_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u_3 := \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad w := \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Sei $U := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq V$. Bestimmen Sie, ob $v \in U$ bzw. $w \in U$ gilt.

(b) Ersetzen Sie in obigen Spaltenvektoren jede Ziffer k durch $\bar{k}$ und betrachten Sie diese Spaltenvektoren damit als Elemente von $\mathbb{F}_3^4$ (wobei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen ist).

Sei $U' := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle_{\mathbb{F}_3} \subseteq V' := \mathbb{F}_3^4$. Bestimmen Sie, ob $v \in U'$ bzw. $w \in U'$ gilt.

Aufgabe 3. (V) Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Bestimmen Sie, ob $\sqrt{3} \in \langle 1, \sqrt{2} \rangle_{\mathbb{Q}}$ gilt oder nicht.

Aufgabe 4. (**S**, 3 Punkte) Sei K ein Körper und V ein K-Vekorraum. Gegeben seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie, dass sich $U := \langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K$ nicht ändert, wenn man eine der 3 folgenden Operationen ausführt (die analog zu elementaren Zeilenumformungen für Matrizen sind):

(i) Für $i \neq j$ vertausche v_i und v_j.
(ii) Für $0 \neq s \in K$ ersetze v_i durch sv_i.
(iii) Für $i \neq j$ und $s \in K$ ersetze v_j durch $v_j + sv_i$.

Aufgabe 5. (V) Sei K und Körper und $A \in K^{m \times n}$.

(a) Sei $A \in K^{m \times n}$ und $V = K^{1 \times n}$. Für $1 \leq i \leq m$ sei $z_i \in K^{1 \times n}$ die i-te Zeile von A. Dann definieren wir $\mathrm{ZR}(A) := \langle z_1, \ldots, z_m \rangle_K \subseteq K^{1 \times n}$ als den Zeilenraum von A. Zeigen Sie (mit Hilfe von Aufgabe 4), dass sich $\mathrm{ZR}(A)$ nicht ändert, wenn man elementare Zeilenumformungen (wie in Kapitel 1, §2) auf A anwendet.

(b) Sei nun A in Zeilenstufenform, mit $r \geq 1$ Stufen und Pivots $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$. Sei $N(A) := \{x \in K^n \mid Ax = 0_m\}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit Matrix A. (In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $N(A)$ ein Teilraum von K^n ist.) Zeigen Sie, dass $N(A)$ von $n - r$ Spaltenvektoren erzeugt wird.

Aufgabe 6. (Z) Sei K ein Körper. Dann heißt die Menge $X := \mathbb{P}(K^3)$ (siehe Aufgabe 1) projektive Ebene über K. Eine Teilmenge $G \subseteq X$ heißt eine projektive Gerade, wenn es $a, b, c \in K$ gibt mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ und

$$G = \left\{ \overline{v} \in X \,\middle|\, v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ und } ax + by + cz = 0 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass zwei verschiedene Punkte von X immer auf einer projektiven Geraden liegen und dass sich zwei verschiedene projektive Geraden immer in einem Punkt von X schneiden. (Es gibt hier also keine parallelen Geraden, die sich nicht schneiden, wie in der üblichen reellen Ebene $\mathbb{R}^2$.)

(b) Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der endliche Körper mit p Elementen. Nach Aufgabe 1(c) gilt $|X| = p^2 + p + 1$. Zeigen Sie, dass es auch genau $p^2 + p + 1$ projektive Geraden gibt, dass jede Gerade genau $p + 1$ Punkte enthält und jeder Punkt auf genau $p + 1$ Geraden liegt.

Auf der Webseite `https://de.wikipedia.org/wiki/Projektive_Ebene` finden Sie weitere Hintergrundinformationen und Motivationen zu diesem Thema.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2019!

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die Aufgaben mit (V) sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Die (Z)-Aufgaben sind Zusatzaufgaben außer Konkurrenz. Sie werden in den Übungen in der Regel nicht besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 8. und 9. Januar in den Übungsgruppen.