13. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

SoSe 2023

Aufgabe 1. (V) Gegeben seien die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Diese Vektoren bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Sei $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ die zu $\{v_1, v_2.v_3\}$ duale Basis des Dualraums $(\mathbb{R}^3)^*$. Nach Beispiel 38.2(a) gibt es Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ mit

$$\lambda_j\Big(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\Big) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + a_{3j}x_3 \qquad \text{für alle } x_i \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie diese Koeffizienten a_{ij}. — Können Sie ein allgemeines Muster erkennen?
D.h., sind n linear unabhängige Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ in K^n gegeben, wie können Sie dann die dazu duale Basis von $(K^n)^*$ bestimmen?

Aufgabe 2. (V) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $1 \leq n = \dim V < \infty$. Sei V^* der Dualraum von V und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in V^*$.

(a) Zeigen Sie: Gibt es ein $0_V \neq v \in V$ mit $\lambda_i(v) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, so sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ linear abhängig in V^*. (*Hinweis:* Betrachten Sie den Annulator $\{v\}^\circ \subseteq V^*$.)

(b) Sei $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ eine Basis von V^*. Zeigen Sie: Es gibt eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V, so dass $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ die zu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ duale Basis von V^* ist.

Aufgabe 3. (**S**, 8=4+4 Punkte) Sei $M_3(\mathbb{Q})$ der Vektorraum der 3×3-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$. Sei $U \subseteq M_3(\mathbb{Q})$ der Teilraum aller symmetrischen Matrizen. Sei $M_3(\mathbb{Q})^*$ der Dualraum von $M_3(\mathbb{Q})$ und $U^\circ \subseteq M_3(\mathbb{Q})^*$ der Annulator von U.

(a) Zeigen Sie $\dim U^\circ = 3$.
(b) Geben Sie explizit drei Linearformen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in U^\circ$ an (das sind also Elemente von $M_3(\mathbb{Q})^*$, d.h., lineare Abbildungen $\lambda_i \colon M_3(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$), die eine Basis von U° bilden.

Aufgabe 4. (**S**, 6 Punkte) Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\varphi \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $\varphi^* \colon W^* \to V^*$ die duale Abbildung. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Kern}(\varphi^*) = \mathrm{Bild}(\varphi)^\circ \qquad \text{und} \qquad \dim \mathrm{Kern}(\varphi^*) = \dim \mathrm{Kern}(\varphi) + \dim W - \dim V.$$

Aufgabe 5. (V)
(a) Zeigen Sie, dass im Tensorprodukt $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ folgende Identität gilt:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 6.\Big(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\Big) + 3.\Big(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big).$$

(b) Wahr oder falsch: In $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ lässt sich jedes Element schreiben als $x \otimes y$ mit $x, y \in \mathbb{R}^2$. — Beweis oder Gegenbeispiel. (*Hinweis:* Satz 39.3, dessen Beweis eine Basis von $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ beschreibt.)

Aufgabe 6. (V) Führen Sie die Details in Beispiel 39.6 aus.

Aufgabe 7. (Z) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Für einen Teilraum $U \subseteq V$ sei $U^\circ \subseteq V^*$ der Annulator von U.

(a) Zeigen Sie: Die Zuordnung $U \mapsto U^\circ$ definiert eine Bijektion zwischen der Menge der Teilräume von V und der Menge der Teilräume von V^*. Dabei kehren sich Inklusionen um, d.h., sind $U_1, U_2 \subseteq V$ Teilräume mit $U_1 \subseteq U_2$, so gilt $U_2^\circ \subseteq U_1^\circ$.

(b) Sei p eine Primzahl und $K = \mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Wieviele 1-dimensionale Teilräume gibt es in $\mathbb{F}_p^n$? Wieviele 1-dimensionale Teilräume gibt es in $(\mathbb{F}_p^n)^*$? Und wieviele $(n-1)$-dimensionale Teilräume gibt es schließlich in $\mathbb{F}_p^n$?

Aufgabe 8. (Z) Gegeben seien K-Vektorräume U, V, W sowie eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$. Zeigen Sie:
(a) Es gibt genau eine lineare Abbildung $\hat{\varphi}\colon U \otimes V \to U \otimes W$ mit $\hat{\varphi}(u \otimes v) = u \otimes \varphi(v)$ für alle $u \in U$ und $v \in V$.
(b) Ist φ surjektiv, so ist auch $\hat{\varphi}$ surjektiv.
(c) Ist φ injektiv, so ist auch $\hat{\varphi}$ injektiv.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Aufgaben mit (Z) sind *zusätzliche Aufgaben.*
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *19. und 20. Juli in den Übungsgruppen.*