12. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

SoSe 2023

Aufgabe 1. (V)
(a) Sei $n \geq 2$. Ist die Menge der normalen Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$ ein Teilraum von $M_n(\mathbb{C})$?
(b) Was können Sie über die Determinante einer unitären Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ aussagen?

Aufgabe 2. (V) Sei V ein beliebiger K-Vektorraum, mit $\dim V \geq 2$. Zeigen Sie, dass es eine invertierbare lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ gibt mit $\varphi \neq \mathrm{id}_V$.

Hinweis: Argumentieren Sie so ähnlich wie in Folgerung 36.6.

Aufgabe 3. (V) Sei V ein K-Vektorraum.
(a) Gegeben seien $x, y \in V$ und Teilräume $U, W \subseteq V$. Zeigen Sie: $\quad x + U = y + W \;\Rightarrow\; U = W$.
(b) Gegeben seien $x, y \in V$ und ein Teilraum $U \subseteq V$. Zeigen Sie: $(x + U) \cap (y + U)$ ist entweder leer oder wieder von der Form $z + U$ mit einem $z \in V$.

Aufgabe 4. (**S**, 6=3+3 Punkte) Gegeben seien die beiden folgenden Teilräume von $\mathbb{Q}^5$:

$$U := \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W := \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Bestimmen Sie mit dem Zassenhaus-Algorithmus (Bemerkung 37.13) Basen für $U \cap W$ und $U + W$.

Aufgabe 5. (V) Sei K ein Körper. Gegeben seien die folgenen drei Teilräume von K^3:

$$U_1 := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in K \right\}, \qquad U_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; z \in K \right\}, \qquad U_3 := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ y \end{bmatrix} \;\middle|\; y \in K \right\}.$$

(a) Zeigen Sie: $U_i \cap U_j = \{0_3\}$ für alle $i \neq j$.
(b) Zeigen Sie: $K^3 = U_1 + U_2 + U_3$.
(c) Gilt $K^3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$?

Aufgabe 6. (**S**, 9=3+3+3 Punkte) Sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0_K$.

(a) Betrachten Sie den Teilraum $U := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \\ y \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in K \right\} \subseteq K^4$.

Finden Sie einen Teilraum $W \subseteq K^4$ mit $K^4 = U \oplus W$.

(b) Gleiche Aufgabenstellung wie in **(a)** aber für $U := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x + y \\ x - y \\ 2x \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in K \right\} \subseteq K^5$.

(c) Sei V ein K-Vektorraum und seien $U_1, U_2, W \subseteq V$ Teilräume. Ist folgende Aussage wahr oder falsch: $\quad V = U_1 \oplus W = U_2 \oplus W \;\Rightarrow\; U_1 = U_2$. $\quad$ (Beweis oder Gegenbeispiel.)

Aufgabe 7. (Z) Sei K ein Körper. Eine Funktion $f\colon K \to K$ heißt **additiv**, wenn $f(x+y) = f(x)+f(y)$ für alle $x, y \in K$ gilt. Jede K-lineare Funktion $f\colon K \to K$ ist also insbesondere additiv, aber gibt es auch Beispiele von additiven Funktionen, die nicht K-linear sind?

(a) Zeigen Sie: Ist $K = \mathbb{Q}$ und $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ additiv, so gilt $f(xy) = xf(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Q}$, d.h., f ist automatisch $\mathbb{Q}$-linear. Mit $s := f(1) \in \mathbb{Q}$ folgt $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = sx$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie: Ist $K = \mathbb{R}$, so gibt es eine additive Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht $\mathbb{R}$-linear ist.

Hinweis zu (a): Für $y \in \mathbb{Q}$ gilt $f(2y) = f(y+y) = f(y) + f(y) = 2f(y)$, $f(3y) = f(y+2y) = f(y) + f(2y) = 3f(y)$ usw.; es folgt $f(ny) = nf(y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie dann $f(-y) = -f(y)$ und $f(ny) = nf(y)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Schließen Sie daraus, dass auch $f(\frac{n}{m}y) = \frac{n}{m}f(y)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt. *Zu (b):* Benutzen Sie, dass sich die über $\mathbb{Q}$ linear unabhängige Menge $\{1, \sqrt{2}\}$ zu einer $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}$ ergänzen lässt (wozu man das Lemma von Zorn benötigt ...); definieren Sie dann "geschickt" eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Aufgaben mit (Z) sind *zusätzliche Aufgaben.*
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *12. und 13. Juli in den Übungsgruppen.*