

11. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

SoSe 2023

Aufgabe 1. (V) Was für eine geometrische Figur in der reellen Ebene \mathbb{R}^2 wird durch die folgende Gleichung beschrieben: $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + 4y^2 + 10x - 6y - 20 = 0$?

Siehe zum Beispiel <https://de.wikipedia.org/wiki/Quadrik> für eine ausführliche Beschreibung der möglichen geometrischen Figuren; oder auch <https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/> (folgen Sie hier den Links **Kurse**, dann **Lineare Algebra**, danach **Analytische Geometrie** und schließlich **Quadriken**.)

Aufgabe 2. (V) (a) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$.

Testen Sie, ob A eine hermitesche, normale oder unitäre Matrix ist.

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, so dass $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ eine normale Matrix ist.

Aufgabe 3. (V) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine normale Matrix. Zeigen Sie, dass A eine Quadratwurzel besitzt, es also eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{C})$ gibt mit $A = B^2$.

Aufgabe 4. (S, 6=3+3 Punkte)

(a) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie: A ist eine hermitesche Matrix genau dann, wenn A eine normale Matrix ist und alle Eigenwerte von A reell sind.

(b) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie: A ist eine unitäre Matrix genau dann, wenn A eine normale Matrix ist und $|\lambda| = 1$ für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gilt.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer normalen Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$, die weder hermitesch noch unitär ist.

Aufgabe 5. (S, 5 Punkte) Gegeben sei $A = \begin{bmatrix} 1 & i & i & 1 \\ -i & 1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 3 & i \\ 1 & i & -i & 3 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$. Man sieht sofort, dass

$A = A^*$ gilt; also ist A hermitesch und damit auch eine normale Matrix. Nach dem (komplexen) Spektralsatz gibt es eine unitäre Matrix $U \in M_4(\mathbb{C})$ so dass $D := U^* \cdot A \cdot U$ eine Diagonalmatrix ist. In Beispiel 35.9 wird ein solches U bereits angegeben. Führen Sie die dazu nötigen Details explizit aus.

Schriftliche Aufgaben sind mit (S) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Aufgaben mit (Z) sind *zusätzliche Aufgaben*.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 5. und 6. Juli in den Übungsgruppen.