9. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. E. Chavli

SoSe 2023

Aufgabe 1. (V) Sei $K = \mathbb{F}_3$ und $A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(K)$; es gilt offenbar $A = A^{\mathrm{tr}}$.

Sei $\beta_A \colon K^4 \times K^4 \to K$ die zugehörige Bilinearform wie in Beispiel 30.1(b). Diese ist symmetrisch wegen $A = A^{\mathrm{tr}}$. Bestimmen Sie mit dem Verfahren in Bemerkung 30.16 (siehe auch Beispiel 20.17) eine Orthogonalbasis von K^4.

Aufgabe 2. (V) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei $\beta \colon V \times V \to K$ eine Bilinearform (nicht unbedingt symmetrisch). Es seien Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ gegeben mit $\beta(v_i, v_i) \neq 0$ für $1 \leq i \leq n$ und $\beta(v_i, v_j) = 0$ für $1 \leq i < j \leq n$. Zeigen Sie, dass das Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 3. (**S**, 9=3+3+3 Punkte) Sei $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^3$. Sei $t \in \mathbb{R}$ und $\beta_t \colon V \times V \to \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform mit Gram-Matrix

$$G_B(\beta_t) = \begin{bmatrix} t & t & 0 \\ t & 2 & t \\ 0 & t & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, so dass β_t positiv-definit ist.
(b) Sei $t = -2$. Bestimmen Sie für β_{-2} die Parameter p, q wie im Trägheitssatz von Sylvester.
(c) Sei $t = 1$ und $A := G_B(\beta_1)$. Zeigen Sie, dass alle Hauptminoren von A ungleich 0 sind und bestimmen Sie die LU-Zerlegung von A (siehe Satz 31.7).

Aufgabe 4. (V) Sei A eine der beiden symmetrischen Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte von A sowie Basen der zugehörigen Eigenräume.
(b) Bestimmen Sie jeweils eine Orthonormalbasis für jeden Eigenraum.

Aufgabe 5. (**S**, 9=3+3+3 Punkte) Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V < \infty$ und $\beta \colon V \times V \to K$ eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform. Sei $0_V \neq r \in V$ gegeben mit $\beta(r, r) \neq 0$. Dann definieren wir eine Abbildung $\varphi_r \colon V \to V$ durch

$$\varphi_r(v) := v - 2\beta(r, r)^{-1}\beta(r, v)r \qquad \text{für alle } v \in V.$$

(a) Zeigen Sie, dass φ_r linear ist; außerdem $\varphi_r(r) = -r$ und $\varphi_r^2 = \mathrm{id}_V$.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi_r^* = \varphi_r$ gilt, wobei φ_r^* die adjungierte Abbildung wie in Satz 30.8 ist.

(c) Zeigen Sie, dass φ_r eine orthogonale Abbildung ist (siehe Bemerkung 30.10).

(d) Sei $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und β das Standard-Skalarprodukt (siehe Kapitel IV, §18). Sei $r := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von φ_r bezüglich der Standardbasis von V.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Aufgaben mit (Z) sind *zusätzliche Aufgaben.*
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *21. und 22. Juni in den Übungsgruppen.*