8. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

SoSe 2023

In den ersten zwei Aufgaben geht es noch einmal um die Jordan-Nornalform von Matrizen.

Aufgabe 1. (V)

(a) Gegeben sei eine Matrix $A \in M_{20}(\mathbb{Q})$ mit $\mu_A = (X^2-1)^{10}$. Was können Sie über die Jordan-Normalform von A aussagen?

(b) Sei $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -6 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_6(\mathbb{Q})$ mit $\begin{array}{l} \mu_A = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 4X + 4 \\ \chi_A = (X^2-4X+4) * \mu_A. \end{array}$.

(Das müssen Sie nicht nachrechnen.) Was sind die Eigenwerte von A? Zeigen Sie, dass es allein mit der Kenntnis von μ_A und χ_A genau 2 Möglichkeiten für die Jordan-Normalform von A gibt. Wie können Sie entscheiden, welche Möglichkeit tatsächlich eintritt?

Aufgabe 2. (V)

(a) Sei $A \in M_{100}(K)$ mit $A^3 = 0_{100\times 100}$, $A^2 \neq 0_{100\times 100}$ und $\mathrm{Rang}(A) = 4$. Was können Sie über die Jordan–Normalfrom von A aussagen?

(b) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_5(\mathbb{F}_3)$.

Es gilt $\mu_A = X^2$ (das müssen Sie nicht nachrechnen). Welche Möglichkeiten gibt es für die Jordan-Normalfom von A? Bestimmen Sie eine imvertierbare Matrix $T \in M_5(\mathbb{F}_3)$, so dass $T^{-1} \cdot A \cdot T$ in Jordan-Normalform ist.

Aufgabe 3. (**S**, 12=3+3+3+3 Punkte) Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ und die Bilinearform $\beta_A\colon \mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}$ wie in Beispiel 30.1(b) definiert, d.h., $\beta_A(v,w) = v^{\mathrm{tr}} \cdot A \cdot w$ für alle $v, w \in \mathbb{Q}^3$.

(a) Berechnen Sie $\beta_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\beta_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ und $\beta_A\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 17 \\ -2023 \\ 39 \end{bmatrix}\right)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\beta_A(v,w) = -\beta_A(w,v)$ für alle $v, w \in \mathbb{Q}^3$ gilt. Also ist β_A reflexiv.

(c) Ist β_A nicht-ausgeartet?

(d) Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$ für den Teilraum $U := \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{Q}^3$.

Aufgabe 4. (**S**, 9=3+3+3 Punkte) Sei K ein Körper und $V = M_n(K)$ der Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen über K.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, $(A, B) \mapsto \operatorname{Spur}\big(A^{\mathrm{tr}} \cdot B\big)$, eine symmetrische Bilinearform ist.

(b) Für $1 \leq i, j \leq n$ sei $E_{ij} \in V$ die Standard-Matrix mit Eintrag 1 an der Stelle (i, j), und 0 überall sonst. Bestimmen Sie $\beta(A, E_{ij})$ für $A \in M_n(K)$ beliebig.

(c) Zeigen Sie, dass β nicht-ausgeartet ist.

Aufgabe 5. (Z) Sei K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$. Wie in LAAG1 haben wir dann die Teilräume

$$N(A) = \{x \in K^n \mid A \cdot x = 0_m\} \subseteq K^n \quad \text{(Nullraum)} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{SR}(A) \subseteq K^m \quad \text{(Spaltenraum)}.$$

Analog ist $\mathrm{SR}(A^{\mathrm{tr}}) \subseteq K^n$ der Spaltenraum von A^{tr}. Sei $\beta\colon K^n \times K^n \to K$ die Standard-Bilinearform.

Zeigen Sie: $\qquad N(A) = \mathrm{SR}(A^{\mathrm{tr}})^\perp \quad$ und $\quad N(A)^\perp = \mathrm{SR}(A^{\mathrm{tr}})$.

Hinweis: Wenn Sie zuerst $\dim N(A) = \dim \mathrm{SR}(A^{\mathrm{tr}})^\perp$ zeigen, so müssen Sie danach nur noch eine der Inklusionen "$\subseteq$" oder "$\supseteq$" beweisen.

Aufgabe 6. (Z; für diejenigen, die mit Integration von reellen Funktionen vertraut sind). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $V = P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad höchstens n. Es ist $B = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, mit $p_i(x) = x^i$ für alle $x \in \mathbb{R}$, eine Basis von V.

Sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform gegeben durch

$$\beta(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx \qquad \text{für } f, g \in V.$$

(a) Bestimmen Sie die Gram-Matrix von β bezüglich der Basis B.

(b) Bestimmen Sie für $n = 2, 3, 4$ eine Orthogonalbasis von V.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Aufgaben mit (Z) sind *zusätzliche Aufgaben.*

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *14. und 15. Juni in den Übungsgruppen.*