7. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

SoSe 2023

Aufgabe 1. (**S**, 12=3+6+3 Punkte) Sei $K = \mathbb{F}_3$ und $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in M_5(K)$.

Das Minimalpolynom von A ist gegeben durch $\mu_A = f := X^3 + X + 1$ (das müssen Sie nicht zeigen).

(a) Zeigen Sie, dass $e_1 \in K^5$ ein maximaler Vektor bezüglich A ist, also $\mu_A = \mu_{A,e_1}$.

(b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T_1 \in M_5(K)$, so dass $A_1 := T_1^{-1} \cdot A \cdot T_1$ eine Blockdiagonalgestalt wie in Jacobs Lemma hat, also $A_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_f & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right]$ mit $A' \in M_2(K)$. Was ist das Minimalpolynom von A'?

(c) Bestimmen Sie die Invariantenteiler von A (also die Polynome f_i in Satz 28.4), und damit die Frobenius–Normalform von A. Besitzt A eine Jordan–Normalform?

(*Hinweis zu (b)*: Gehen Sie analog zu Beispiel 28.2(b) vor, indem Sie eine Matrix C wie in Bemerkung 28.1 aufstellen und damit $W = \{w \in K^5 \mid C \cdot w = 0_3\}$ bestimmen.)

Aufgabe 2. (**S**, 6=3+3 Punkte) Sei $n \geq 2$ und $A \in M_n(K)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathrm{Grad}(\mu_A) = n - 1$, so besitzt A einen Eigenwert $\lambda \in K$ und die algebraische Vielfachheit von λ ist mindestens 2.

(b) Ist A zerfallend und $\mathrm{Grad}(\mu_A) = 2$, so ist A diagonalisierbar oder es gibt genau einen Eigenwert.

(*Hinweis*: Benutzen Sie die Frobenius–Normalform; siehe Satz 28.4.)

Aufgabe 3. (V) Bestimmen Sie die möglichen Jordan–Normalformen von Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$ für $n = 3, 4$. Zum Beispiel für $n = 2$ gibt es die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad (\text{wobei } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ mit } \lambda \neq \mu).$$

(In der ersten Matrix haben wir 2 Blöcke der Größe 1 zum gleichen Eigenwert; in der zweiten Matrix einen Block der Größe 2; und in der dritten Matrix 2 Blöcke der Größe 1 zu verschiedenen Eigenwerten.)

Aufgabe 4. (V) Sei $A \in M_8(\mathbb{C})$ mit $\mathrm{Rang}(A) = 6$ und $\mu_A = X^6 + 2X^4 + X^2$. Bestimmen Sie die möglichen Jordan-Normalformen von A.

Aufgabe 5. (V) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$. Zeigen Sie:

(a) $e_n \in K^n$ ist ein maximaler Vektor für den Jordan-Block $J_n(\lambda) \in M_n(K)$.

(b) Das Minimalpolynom von $J_n(\lambda)$ ist $f = (X - \lambda)^n$; folglich ist $J_n(\lambda)$ ähnlich zur Begleitmatrix $A_f \in M_n(K)$.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Aufgaben mit (Z) sind *zusätzliche Aufgaben.*
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *7. und 8. Juni in den Übungsgruppen.*