6. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

SoSe 2023

Aufgabe 1. (**S**, 6=4+2 Punkte) Sei K ein Körper und

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \in M_n(K), \qquad \text{wobei } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K \text{ beliebig.}$$

Da A eine obere Dreiecksmatrix ist, gilt $\chi_A = (-1)^n f$, wobei $f := (X - \lambda_1)*(X - \lambda_2)*(X - \lambda_3) \in K[X]$; insbesondere ist A zerfallend.

- **(a)** Zeigen Sie, dass $e_3 \in K^3$ ein maximaler Vektor bezüglich A ist. Was ist das Minimalpolynom von A? Ist A diagonalisierbar?
- **(b)** Zeigen Sie, dass A ähnlich ist zur Begleitmatrix $A_f \in M_3(K)$. (*Hinweis:* Folgerung 27.7.)

Aufgabe 2. (**S**, 12=4+4+4 Punkte) Bestimmen Sie die Frobenius-Normalform und, wenn möglich, auch die Hauptraumzerlegung der drei Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \in M_3(\mathbb{Q}).$$

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom.

Aufgabe 3. (V) Sei $A \in M_7(\mathbb{Q})$ mit $\mathrm{Rang}(A) = 4$ und $A^3 = 0_{7\times 7}$. Was können Sie über die Frobenius-Normalform von A aussagen (z.B., wie viele Diagonalblöcke kann es geben)?

Aufgabe 4. (V) Sei $A \in M_6(\mathbb{C})$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom $\chi_A = X^2 * (X^2+1)^2$. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für die Frobenius-Normalform von A.

Hinweis: Seien $f_1, \ldots, f_r \in K[X]$ wie in Satz 28.4; dann sind die f_i normiert, es gilt $f = \mu_A$ und $f_{i+1} \mid f_i$ für $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Nach Folgerung 28.6 gilt außerdem $\chi_A = f_1 * f_2 * \ldots * f_r$. Welche Möglichkeiten gibt es also für $f_1, \ldots, f_r$?

Aufgabe 5. (V) Sei $n \geq 4$. Geben Sie Beispiele für Matrizen $A, B \in M_n(K)$, so dass A, B nicht ähnlich sind, aber das gleiche Minimalpolynom und das gleiche charakterische Polynom haben. Gibt es solche Beispiele auch für $n = 2, 3$?

Aufgabe 6. (Z) Sei $A \in M_n(K)$. Nach Folgerung 28.8 ist A ähnlich zu A^{tr}. Zeigen Sie nun, dass es eine <u>symmetrische</u> invertierbare Matrix $P \in M_n(K)$ gibt mit $A^{\mathrm{tr}} = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Hinweis: Sei A_f die Begleitmatrix zu einem normierten Polynom f. Sei C_0 die Matrix in Bemerkung 28.9. Verifizieren Sie die Gleichung $A_f \cdot C_0 = C_0 \cdot A_f^{\mathrm{tr}}$. Gehen Sie dann noch einmal den Beweis von Folgerung 28.8 durch.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Aufgaben mit (Z) sind *zusätzliche Aufgaben.*
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *24. und 25. Mai in den Übungsgruppen.*