5. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

SoSe 2023

Aufgabe 1. (V) Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in M_n(K)$ mit der Eigenschaft, dass jeder Vektor $0_n \neq x \in K^n$ ein Eigenvektor von A ist.

Aufgabe 2. (V) Geben Sie jeweils ein konkretes Beispiel an für ...
(a) ... eine lineare Abbildung, die weder injektiv noch surjektiv ist;
(b) ... eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ und einen Vektor $v \in V$ mit $v \notin \operatorname{Kern}(\varphi)$;
(c) ... eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ und einen Vektor $w \in W$ mit $w \notin \operatorname{Bild}(\varphi)$;
(d) ... eine Matrix $A \in M_4(\mathbb{R})$, deren charakterisches Polynom χ_A nicht zerfallend ist;
(e) ... eine Matrix $A \in M_3(\mathbb{C})$, die nicht diagonalisierbar ist aber χ_A zerfallend ist;
(f) ... eine Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ mit genau zwei Eigenwerten $\lambda \neq \mu$, die nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3. (**S**, 9=2+5+2 Punkte) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_5(K)$, wobei $K = \mathbb{F}_2$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_A \in K[X]$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Minimalpolynome $\mu_{A,e_i} \in K[X]$, wobei $e_1, \ldots, e_5$ die Standard-Basisvektoren von K^5 sind.

(c) Bestimmen Sie einen maximalen Vektor für A.

Aufgabe 4. (**S**, 5 Punkte) Sei $A \in M_n(K)$. In Satz 27.1 der Vorlesung wird bemerkt, dass stets $\mu_{A,v}$ ein Teiler von μ_A ist, für alle $v \in K^n$. Zeigen Sie nun: Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine beliebige Basis von K^n, so ist μ_A ein Teiler des Produktes $\mu_{A,v_1} * \ldots * \mu_{A,v_n}$.

Aufgabe 5. (V) Sei $A \in M_n(K)$.

(a) Seien $v_1, v_2 \in K^n$; setze $f_i := \mu_{A,v_i} \in K[X]$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie: Gilt $\operatorname{ggT}(f_1, f_2) = 1$, so ist $f_1 * f_2$ das lokale Minimalpolynom von $v + w$.

(b) Sei $v \in K^n$; es gelte $\mu_{A,v} = f * g$ mit normierten Polynomen $f, g \in K[X]$. Zeigen Sie: Für $w := f(A) \cdot v \in K^n$ ist dann $\mu_{A,w} = g$.

Aufgabe 6. (Z) Sei V ein K-Vektorraum mit $n = \dim V < \infty$, und $\varphi\colon V \to V$ linear. Sei φ nilpotent (siehe Ü4A5) und $d \in \mathbb{N}$ minimal mit $\varphi^d = \underline{0}$.

(a) Zeigen Sie: $\quad \operatorname{Kern}(\varphi) \neq \{0_V\}$ und $\operatorname{Bild}(\varphi) \subsetneq V$.

(b) Zeigen Sie: $\{0_V\} \subsetneqq \operatorname{Kern}(\varphi) \subsetneqq \operatorname{Kern}(\varphi^2) \subsetneqq \ldots \subsetneqq \operatorname{Kern}(\varphi^{d-1}) \subsetneqq \operatorname{Kern}(\varphi^d) = V.$

(c) Sei B_1 eine Basis von $\operatorname{Kern}(\varphi)$; ergänze diese zu einer Basis B_2 von $\operatorname{Kern}(\varphi^2)$, und so weiter, bis wir schließlich eine Basis $B := B_d$ von $V = \operatorname{Kern}(\varphi^d)$ erhalten. Zeigen Sie, dass die darstellende Matrix $M_B(\varphi) \in M_n(K)$ eine obere Dreiecksmatrix mit 0 auf der Diagonalen ist.

(Wir werden die letztere Aussage auch noch in der Vorlesung zeigen, als Spezialfall einer viel allgemeineren Aussage.)

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Aufgaben mit (Z) sind *zusätzliche Aufgaben.*
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *17. und 18. Mai in den Übungsgruppen.*