4. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

SoSe 2023

(Aufgabe 4 war bereits auf dem Ferien-Übungsblatt; siehe auch Sprechstunde01-Aufschrieb.)

Aufgabe 1. (V) Wir betrachten folgende Matrizen :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{F}_3),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$$

(a) Berechnen Sie die charakteristischen Polynome dieser Matrizen.

(b) Finden Sie danach die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

(c) Sei M eine der obigen Matrizen. Entscheiden Sie ob M diagonalisierbar ist oder nicht. Wenn M diagonalisierbar ist, so finden Sie eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D sodass $D = T^{-1} \cdot M \cdot T$.

Aufgabe 2. (V) Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und seien $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ zwei reellen Zahlen. Wir definieren eine Matrix $M_{a,b} \in M_n(\mathbb{R})$ durch $(M_{a,b})_{ij} = a$ falls $i = j$ und $(M_{a,b})_{ij} = b$ falls $i \neq j$. (d.h. $M_{a,b}$ hat a auf der Diagonale und b außerhalb der Diagonale.)

(a) Zeigen Sie, ohne das charakteristische Polynom zu berechnen, dass $a - b$ ein Eigenwert von $M_{a,b}$ ist.

(b) Ist die Matrix $M_{a,b}$ diagonalisierbar ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. (V) Sei $a \in \mathbb{R}$ eine feste reelle Zahl und sei $V = \mathbb{R}^4$. Sei nun $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ definiert durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + ax_3 + ax_4 \\ -x_2 - ax_3 - ax_4 \\ x_2 + x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von φ.

(b) Finden Sie die Eigenwerte von φ und ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Ist φ diagonalisierbar ?

Aufgabe 4. (**S**, 6=3+3 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ fest. Für $i \in \mathbb{N}$ setzen wir $\varphi^i := \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{i \text{ mal}}$.
Für ein Polynom $f = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0 \in K[X]$ können wir dann

$$f(\varphi) := a_d \varphi^d + \ldots + a_1 \varphi + a_0 \mathrm{id}_V \in \mathrm{End}(V)$$

definieren. Sei nun $n = \dim V < \infty$. Zeigen Sie:

(a) Ist B eine Basis von V, so gilt $M_B\big(f(\varphi)\big) = f\big(M_B(\varphi)\big)$. Geben Sie genau an, welche Sätze und Aussagen der Vorlesung Sie benutzen.

(b) Es gibt ein eindeutiges, normiertes Polynom $f_0 \in K[X]$ kleinsten Grades mit $f_0(\varphi) = \underline{0}$. Ist B eine Basis von V und $A := M_B(\varphi) \in M_n(K)$, so gilt $f_0 = \mu_A$ (= Minimalpolynom von A, wie in der Vorlesung §14 definiert).

Aufgabe 5. (**S**, 6=2+4 Punkte) Sei V ein K-Vektorraum mit $n = \dim V < \infty$, und $\varphi\colon V \to V$ linear. Ist B eine Basis von V und $A := M_B(\varphi) \in M_n(K)$ die darstellende Matrix von φ bezüglich B, so setzen wir $\det(\varphi) := \det(A)$ und $\mathrm{Spur}(\varphi) := \mathrm{Spur}(A)$.

(a) Zeigen Sie, dass dies "wohl-definiert" ist, d.h., nicht von der Wahl der Basis B abhängt.

(b) Gilt $\varphi^d = \underline{0}$ für ein $d \in \mathbb{N}$, so heißt φ **nilpotent**.

Sei nun $K = \mathbb{C}$. Zeigen Sie: φ nilpotent $\Rightarrow \det(\varphi) = 0$ und $\mathrm{Spur}(\varphi) = 0$. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 6. (Z) Sei K ein Körper; seien $A, B \in M_n(K)$. Zeigen Sie, dass $A \cdot B$ und $B \cdot A$ das gleiche charakteristische Polynom, aber nicht unbedingt das gleiche Minimalpolynom haben. (Geben Sie für letzteres ein Beispiel an.)
Hinweis: Siehe zum Beispiel `https://math.stackexchange.com/questions/311342`

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Aufgaben mit (Z) sind *zusätzliche Aufgaben.*
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *10. und 11. Mai in den Übungsgruppen.*