3. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

SoSe 2023

Zunächst eine allgemeine Vorbemerkung, die sich für das Rechnen mit Matrizen oft als nützlich erweist. Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei $T = [t_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(R)$ und $1 \leq m < n$. Ziehen wir in T nach den ersten m Zeilen und den ersten m Spalten jeweils einen Trennstrich, so können wir uns T als aufgebaut aus 4 kleineren Matrizen vorstellen:

$$T = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \quad \text{mit} \quad A \in R^{m\times m},\ B \in R^{m\times(n-m)},\ C \in R^{(n-m)\times m},\ D \in R^{(n-m)\times(n-m)}.$$

Sei nun auch $T' \in M_n(R)$ nach obigem Schema in "Kästchen" (oder "Blöcke") aufgeteilt, mit analogen kleineren Matrizen A', B', C', D'. Überzeugen Sie sich davon, dass dann gilt:

$$T \cdot T' = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A{\cdot}A' + B{\cdot}C' & A{\cdot}B' + B{\cdot}D' \\ \hline C{\cdot}A' + D{\cdot}C' & C{\cdot}B' + D{\cdot}D' \end{array}\right],$$

d.h., man kann T und T' "kästchenweise" (oder "blockweise") multiplizieren. (Dies wird zum Beispiel im Beweis von Satz 23.4 der Vorlesung benutzt.) Machen Sie sich dies explizit an einem Beispiel mit $n = 3$ und $m = 2$ klar.

Aufgabe 1. (V) Sei K ein Körper, $1 \leq m < n$ und $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \in M_n(K)$ eine Blockmatrix wie oben, mit $A \in K^{m\times m}$, $B \in K^{m\times(n-m)}$, $C \in K^{(n-m)\times m}$, $D \in K^{(n-m)\times(n-m)}$. Sei $\det(A) \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0_{m\times(n-m)} \\ \hline C{\cdot}A^{-1} & I_{n-m} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{(n-m)\times m} & D - C{\cdot}A^{-1}{\cdot}B \end{array}\right]$ gilt.

(b) Folgern Sie, dass $\det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]\right) = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$ gilt.

(c) Berechnen Sie auf diese Weise (mit $m = 2$) die Determinante von $\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{F}_3)$.

Die Matrix $D - C{\cdot}A^{-1}{\cdot}B$ heißt *Schur-Komplement* zu A (nach Issai Schur, 1875–1941); siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Issai_Schur`.

Aufgabe 2. (V) Berechnen Sie, ohne Benutzung eines Computers, $\det(A)$ für die folgenden Matrizen:

(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & \sqrt{2} & \frac{165}{2} \\ \sqrt{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 20 & 1000 & 0 & 10 \\ 0 & -\frac{19}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$,

(b) $A = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{5} & \bar{5} \\ \bar{7} & \bar{1} & \bar{4} \\ \overline{11} & \bar{3} & \bar{9} \end{bmatrix} \in M_3(K)$ für $K = \mathbb{F}_3$, $K = \mathbb{F}_5$ und $K = \mathbb{F}_{17}$.

Hinweis: Benutzen Sie geschickt elementare Zeilenumformungen; wegen $\det(A) = \det(A^{\text{tr}})$ können Sie zusätzlich auch noch elementare Spaltenumformungen verwenden. Für **(b)** : die Zahlen 255, 714 und 1139 sind Vielfache von 17.

Aufgabe 3. (**S**, 6=2+4 Punkte) Sei $n \geq 1$ und $A_n = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{Q})$ die Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j, \\ -1 & \text{falls } i = j+1 \text{ oder } i = j-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie A_n für $n = 1, 2, 3, 4$ explizit auf und berechnen Sie $\det(A_n)$.

(b) "Raten" Sie mit den Ergebnissen aus (a) eine allgemeine Formel für $\det(A_n)$ und beweisen Sie diese Formel (z.B. mit vollständiger Induktion).

Aufgabe 4. (V) Sei $n \geq 2$. Gegeben seien $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ sowie Polynome $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[X]$ mit $f_i \neq \underline{0}$ und $\text{Grad}(f_i) \leq n-2$ für alle i. Berechnen Sie

$$\det\left(\begin{bmatrix} f_1(z_1) & f_1(z_2) & \ldots & f_1(z_n) \\ f_2(z_1) & f_2(z_2) & \ldots & f_2(z_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(z_1) & f_n(z_2) & \ldots & f_n(z_n) \end{bmatrix}\right).$$

Aufgabe 5. (**S**, 8=3+5 Punkte) Gegeben sei die Matrix $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ für $t \in \mathbb{Q}$.

(a) Bestimmmen Sie alle $t \in \mathbb{Q}$ für welche $A(t)$ invertierbar ist.

(b) Sei $t \in \mathbb{Q}$ so, dass $A(t)$ invertierbar ist. Bestimmen Sie $A(t)^{-1}$ mit Hilfe der Formel $A(t)^{-1} = \det(A(t))^{-1}\tilde{A}(t)$ wobei $\tilde{A}(t)$ die Adjunkte von $A(t)$ ist.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Aufgaben mit (Z) sind *zusätzliche Aufgaben.*
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *3. und 4. Mai in den Übungsgruppen.*