2. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

SoSe 2023

Aufgabe 1. (V) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen (über dem jeweils angegebenen kommutativen Ring R mit 1):

$$\begin{pmatrix} \bar{5} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2X+1 & -X \\ X^2+3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2i & 3 \\ 1+2i & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2i \end{pmatrix}$$

(über $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$) (über $\mathbb{Q}[X]$) (über $\mathbb{Q}$) (über R beliebig) (über $\mathbb{C}$).

Aufgabe 2. (V) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Ist die folgende Aussage im Allgemeinen richtig oder falsch: $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ für $A, B \in M_n(R)$.

Aufgabe 3. (V)

(a) Zeigen Sie, dass es keine Matrix $A \in M_5(\mathbb{R})$ gibt mit $A^4 + I_5 = 0_{5\times 5}$.

(b) Gleiche Frage wie in (a), aber mit $\mathbb{F}_2$ oder $\mathbb{F}_5$ anstelle von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4. (**S**, 6=3+3 Punkte) Gegeben sei die 3×3 Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$.

- **(a)** Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A = \det(A - XI_3) \in \mathbb{Q}[X]$ von A. Insbesondere erhalten Sie damit $\det(A) = \chi_A(0)$; es sollte $\det(A) \neq 0$ gelten.
- **(b)** Sei $b \in \mathbb{Q}^3$ beliebig, mit Komponenten $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie, mit Hilfe der Cramerschen Regel, Formeln für die Komponenten x_1, x_2, x_3 von $x \in \mathbb{Q}^3$ mit $A \cdot x = b$.

Aufgabe 5. (V) Sei $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Dann heißt A invertierbar über $\mathbb{Z}$, wenn es ein $B \in M_n(\mathbb{Z})$ gibt mit $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Zeigen Sie: A invertierbar über $\mathbb{Z}$ $\iff$ $\det(A) = \pm 1$.

[Hinweis: Produktregel, Cramersche Regel und Beispiel 22.6 der Vorlesung.]

Aufgabe 6. (**S**, 6=2+2+2 Punkte) Sei K ein Körper und $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$. Wie in der Vorlesung definieren wir $\mathrm{Spur}(A) := a_{11} + \ldots + a_{nn}$ als Summe der Diagonaleinträge von A.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{Spur}\colon M_n(K) \to K, A \mapsto \mathrm{Spur}(A),$ linear ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(A \cdot B) = \mathrm{Spur}(B \cdot A)$ für alle $A, B \in M_n(K)$ gilt.
(c) Folgern Sie aus (b), dass $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B)$ gilt, wenn A, B ähnlich sind.

Aufgabe 7. (Z) Diese Aufgabe zeigt, dass die Signum-Funktion letztlich durch die Eigenschaft in Satz 21.5 der Vorlesung bestimmt ist.

Sei $f\colon S_n \to \mathbb{Q}$ eine beliebige Funktion mit $f(\mathrm{id}) \neq 0$ und $f(\sigma \circ \pi) = f(\sigma) \cdot f(\pi)$ für alle $\sigma, \pi \in S_n$. Zeigen Sie: Entweder gilt $f(\sigma) = 1$ für alle $\sigma \in S_n$, oder es ist $f = \mathrm{sgn}$.

Schriftliche Aufgaben sind mit (**S**) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Aufgaben mit (Z) sind *zusätzliche Aufgaben.*
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: *26. und 27. April in den Übungsgruppen.*