

# 1. Übungsblatt zu Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu

WiSe 2022/23

**Aufgabe 1.** (V) Sei  $\sigma \in S_3$  die Transposition, die 1, 2 vertauscht und  $\tau \in S_3$  die Transposition, die 2, 3 vertauscht.

- (a) Zeigen Sie:  $S_3 = \{\text{id}, \sigma, \tau, \sigma \circ \tau, \tau \circ \sigma, \sigma \circ \tau \circ \sigma = \tau \circ \sigma \circ \tau\}$ .
- (b) Bestimmen Sie die Multiplikationstabelle von  $S_3$ .

**Aufgabe 2.** (S, 6 Punkte) Wir schreiben eine Permutation  $\pi \in S_n$  einfach als Liste  $\pi = [\pi(1) \pi(2) \dots \pi(n)]$ . Gegeben seien die folgenden beiden Permutationen in  $S_6$ :

$$\pi = [1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 6 \ 5] \quad \text{und} \quad \sigma = [6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1].$$

(Es gilt also  $\pi(1) = 1, \pi(2) = 3, \pi(3) = 4, \pi(4) = 2, \dots$ )

- (a) Nach der Vorlesung kann jede Permutation in  $S_6$  als Produkt von höchstens 5 Transpositionen geschrieben werden. Bestimmen Sie solche Darstellungen für  $\pi, \pi^{-1}, \sigma, \pi \circ \sigma, \sigma \circ \pi$ .
- (b) Bestimmen Sie das Signum aller in (a) betrachteten Permutationen.

**Aufgabe 3.** (V) Gegeben seien die folgenden beiden Permutationen in  $S_9$ :

$$\pi = [5 \ 7 \ 1 \ 8 \ 2 \ 6 \ 4 \ 9 \ 3] \quad \text{und} \quad \sigma = [1 \ 4 \ 6 \ 5 \ 2 \ 9 \ 3 \ 8 \ 7].$$

- (a) Nach der Vorlesung kann jede Permutation in  $S_9$  als Produkt von höchstens 8 Transpositionen geschrieben werden. Bestimmen Sie solche Darstellungen für  $\pi, \pi^{-1}, \sigma, \pi \circ \sigma, \sigma \circ \pi$ .
- (b) Bestimmen Sie das Signum aller in (a) betrachteten Permutationen.

**Aufgabe 4.** (V) Für  $\pi \in S_n$  sei  $\ell(\pi) := |N(\pi)|$  die Anzahl der Fehlstände von  $\pi$ . Nach Definition gilt also  $\ell(\pi) \leq \binom{n}{2} = n(n-1)/2$ .

- (a) Bestimmen Sie ein  $\pi \in S_n$  mit  $\ell(\pi) = n(n-1)/2$  für  $n = 2, 3, 4, 5$ .
- (b) Analog für  $n$  beliebig.

**Aufgabe 5.** (S, 3 Punkte) Zeigen Sie: 
$$\text{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \quad \text{für alle } \sigma \in S_n.$$

**Aufgabe 6.** (Z) Schreiben Sie ein Computer-Programm (z.B. in Python oder in GAP) mit:

**Input:** Eine Permutation  $\pi \in S_n$ , gegeben als Liste  $[\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)]$ .

**Output:** Eine Liste von Paaren  $[[i_1, j_1], [i_2, j_2], \dots, [i_r, j_r]]$ , mit  $r \leq n - 1$  und so dass

$$\pi = \tau_{i_1 j_1} \circ \tau_{i_2 j_2} \circ \dots \circ \tau_{i_r j_r} \text{ gilt;}$$

wobei, wie in der Vorlesung,  $\tau_{kl} \in S_n$  die Transposition bezeichnet, die die Ziffern  $k, l \in \{1, \dots, n\}$  (mit  $k \neq l$ ) vertauscht und alle anderen Ziffern festlässt.

Schriftliche Aufgaben sind mit (S) markiert. Die mit (V) markierten Aufgaben sind zum *Votieren* bzw. zum *Vorrechnen* in den Gruppenübungen. Aufgaben mit (Z) sind *zusätzliche Aufgaben*.

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** 19. und 20. April in den Übungsgruppen.